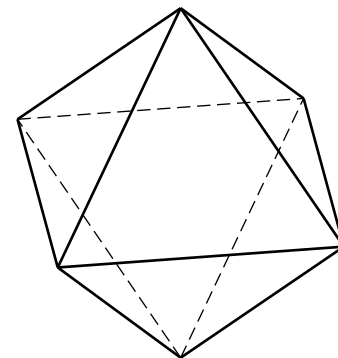
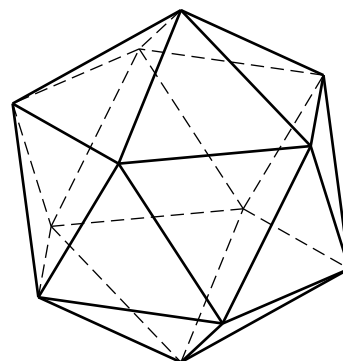
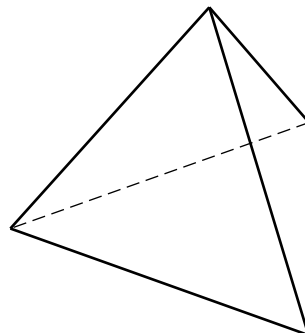
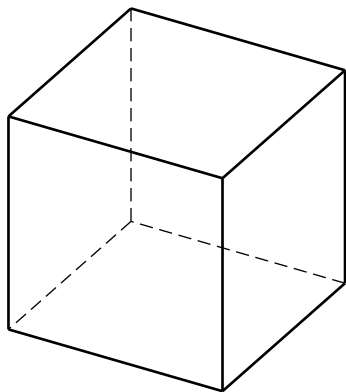
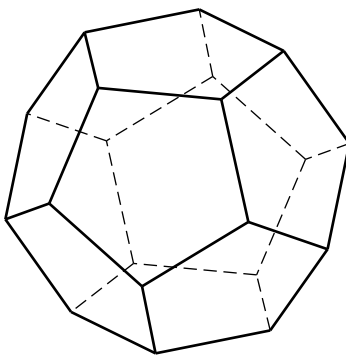


PLATÓNOVA TĚLESA

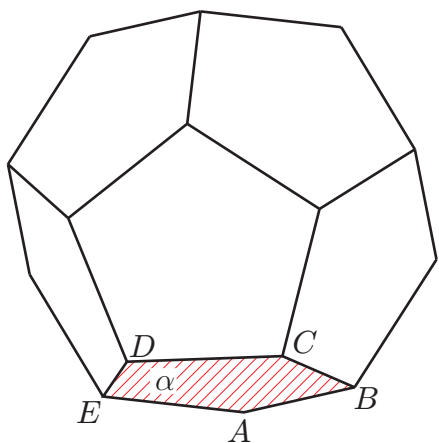
pravidelné konvexní mnohostěny

Platónova tělesa	Stěny	Počet		
		stěn S	vrcholů V	hran H
ČTYŘSTĚN – <i>tetraedr</i>	rovnostanný trojúhelník	4	4	6
ŠESTISTĚN (KRYCHLE) – <i>hexaedr</i>	čtverec	6	8	12
OSMISTĚN – <i>oktaedr</i>	rovnostanný trojúhelník	8	6	12
DVANÁCTISTĚN – <i>dodekaedr</i>	pravidelný pětiúhelník	12	20	30
DVACETISTĚN – <i>ikosaedr</i>	rovnostanný trojúhelník	20	12	30

Eulerova formule: $S + V = H + 2$

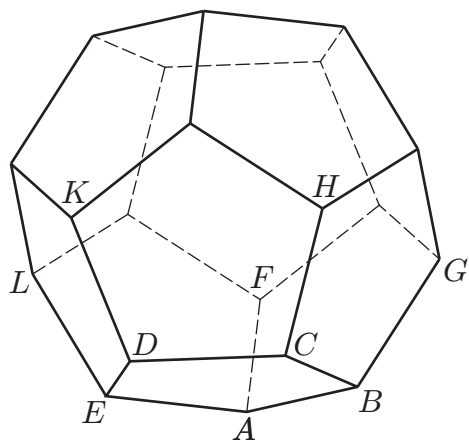


PRAVIDELNÝ DVANÁCTISTĚN



Každá stěna pravidelného dvanáctistěnu je pravidelný pětiúhelník.

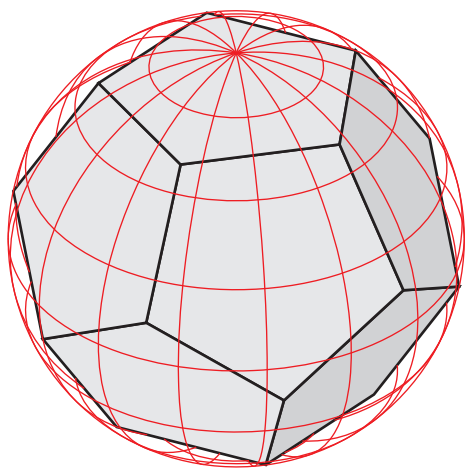
Označme vrcholy jedné stěny A, B, C, D a E , rovinu této stěny označme α .



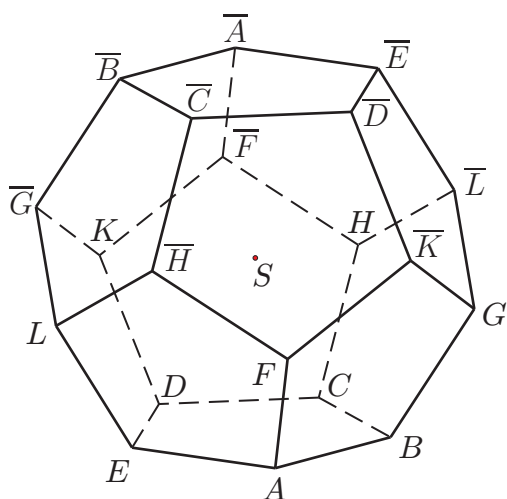
Z každého vrcholu dvanáctistěnu vycházejí 3 hrany. Označme další vrcholy dvanáctistěnu takto:

- z vrcholu A vycházejí hrany AB, AE, AF ,
- z vrcholu B hrany BA, BC, BG ,
- z vrcholu C hrany CB, CD, CH ,
- z vrcholu D hrany DC, DE, DK ,
- z vrcholu E hrany EA, ED, EL .

Odchylky rovin (A, B, F) , (B, C, G) , (C, D, H) , (D, E, K) a (A, E, F) (rovin stěn) od roviny α jsou stejné.



Pravidelný dvanáctistěn lze vepsat do kulové plochy $\mathcal{K}(S, |SA|)$, bod S je středem souměrnosti tělesa.



Označme další vrcholy dvanáctistěnu takto:

- vrchol souměrný k vrcholu A podle středu S označme \bar{A} ,
- vrchol souměrný k vrcholu B podle středu S označme \bar{B} ,
- \vdots
- vrchol souměrný k vrcholu L podle středu S označme \bar{L} .

Tedy bod S je středem úseček $A\bar{A}$, $B\bar{B}$, \dots , $L\bar{L}$.

Pravidelný dvanáctistěn má 20 vrcholů.

PRAVIDELNÝ DVANÁCTISTĚN a jeho zobrazení v MP

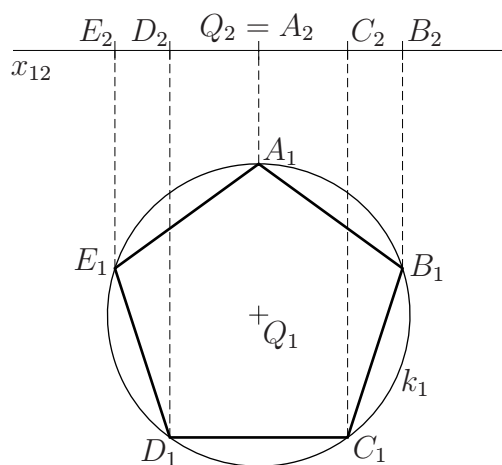
Příklad 1

A4 na výšku, MP: $O[10, 5 ; 17]$

Zobrazte pravidelný dvanáctistěn, jehož jedna stěna $ABCDE$ o středu Q leží v půdorysně π , $Q[0; 7; 0]$, $A[0; 3; 0]$.

(Obrázky v textu jsou v měřítku 1:2.)

Zobrazíme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$ o středu Q ležící v π . Označme $r = |AQ|$.

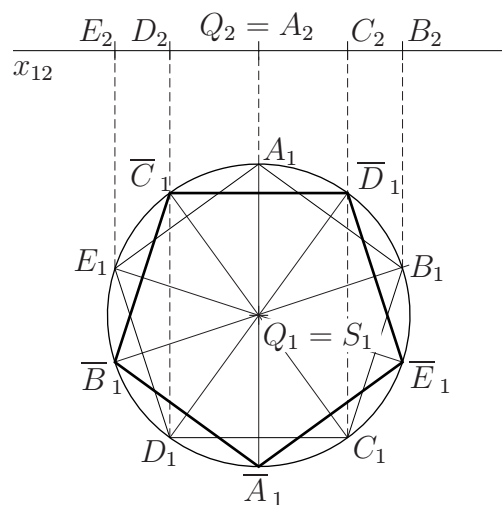


1. $k_1(Q_1; r)$

$A_1B_1C_1D_1E_1$ je pravidelný pětiúhelník vepsaný do kružnice k_1 (označení po směru hodinových ručiček)

2. nárysem pětiúhelníka $ABCDE$ je úsečka E_2B_2

Vrcholy $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D}, \overline{E}$ stěny protilehlé ke stěně $ABCDE$ jsou body souměrné k bodům A, B, C, D, E podle středu S .

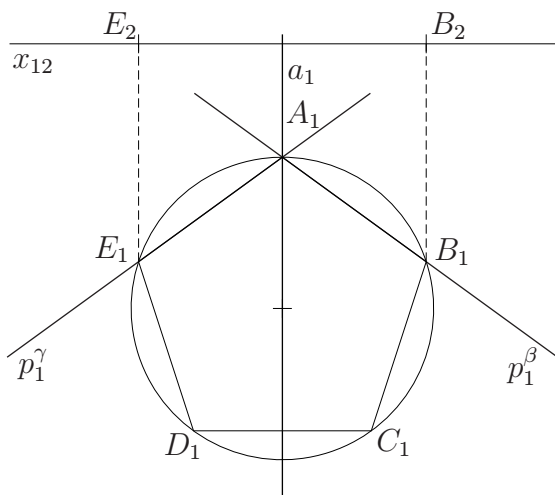


3. $S_1 = Q_1$

\overline{A}_1 je bod souměrný k A_1 podle S_1

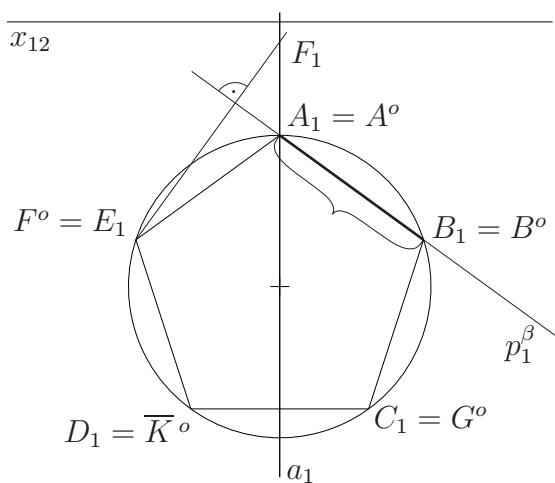
$\overline{A}_1 \in k_1$

body $A_1, \overline{D}_1, B_1, \overline{E}_1, C_1, \overline{A}_1, D_1, \overline{B}_1, E_1, \overline{C}_1$ jsou vrcholy pravidelného desetiúhelníka vepsaného do kružnice k_1



Odchylka roviny $\beta(A, B, F)$ od půdorysny a odchylka roviny $\gamma(A, E, F)$ od půdorysny je stejná. Označme a průsečnici rovin β a γ (průsečnice rovin dvou stěn), $a = \beta \cap \gamma = AF$.

4. $p_1^\beta = A_1B_1$
 $p_1^\gamma = A_1E_1$
 a_1 je osou úhlu přímek p_1^β a p_1^γ



Chceme zobrazit bod F , který je vrcholem pravidelného pětiúhelníka $ABG\bar{K}F$ v rovině β (a také vrcholem pravidelného pětiúhelníka $AEL\bar{H}F$ v rovině γ).

Otočíme rovinu β kolem p_1^β do půdorysny tak, že pětiúhelník $A^oB^oG^o\bar{K}^oF^o$ splyne s pětiúhelníkem $ABCDE$, tj. $F^o = E$.

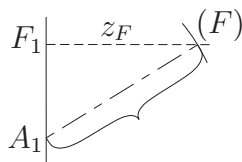
5. využijeme pravoúhlé afinity s osou p_1^β
 $F_1 \in a_1, F_1F^o \perp p_1^\beta$
6. určíme z -ovou souřadnici bodu F

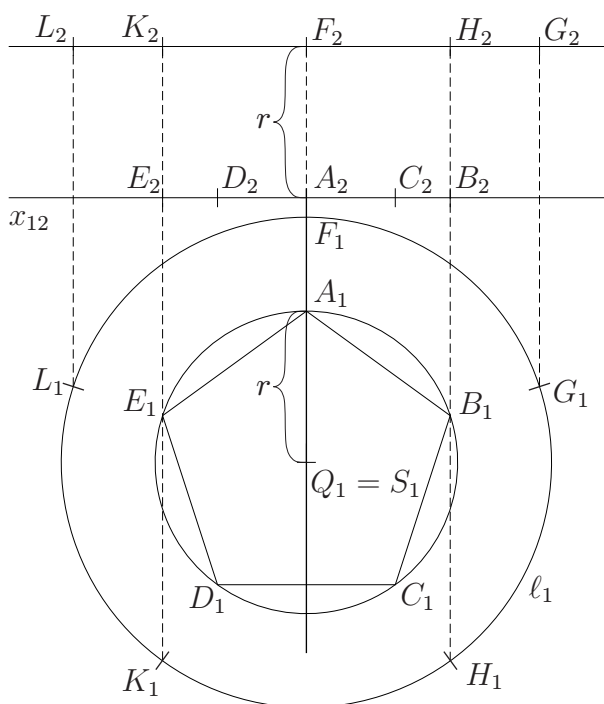
$\triangle AF_1F$:
 $|AF| =$ strana pětiúhelníka $ABCDE$
 $\angle(AF_1F) = 90^\circ$

sestrojíme bod (F)

při přesném rýsování je

$z_F = |F_1(F)| = r =$ poloměr kružnice k

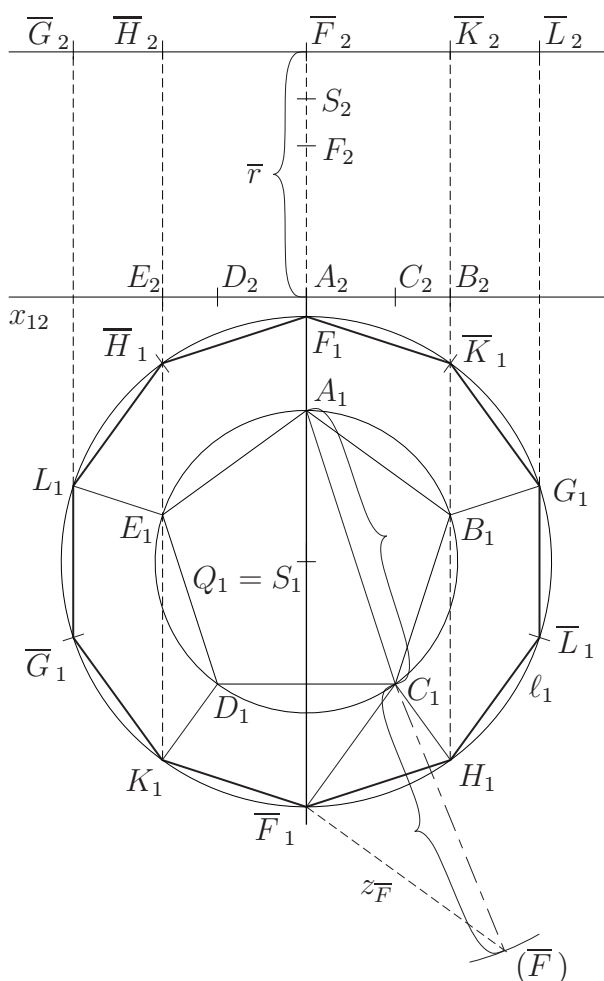




7. F_1, G_1, H_1, K_1, L_1 jsou vrcholy pravidelného pětiúhelníka vepsaného do kružnice $\ell_1(Q_1, \bar{r} = |Q_1F_1|)$
 $z_F = z_G = z_H = z_K = z_L = r$

8. bod \bar{F}_1 je souměrný k F_1 podle S_1 ,
 bod \bar{G}_1 je souměrný k G_1 podle S_1 ,
 ...

body $F_1, \bar{K}_1, G_1, \bar{L}_1, H_1, \bar{F}_1, K_1, \bar{G}_1, L_1, \bar{H}_1$ jsou vrcholy pravidelného desetiúhelníka vepsaného do kružnice ℓ_1 a tento desetiúhelník je obrysovou čarou půdorysu dvanáctistěny



9. určíme z -ovou souřadnici bodu \bar{F}
 $\Delta CF_1\bar{F}$: $|CF_1| = |AC|$
 $\angle(CF_1\bar{F}) = 90^\circ$

sestrojíme (\bar{F})

při přesném rýsování je

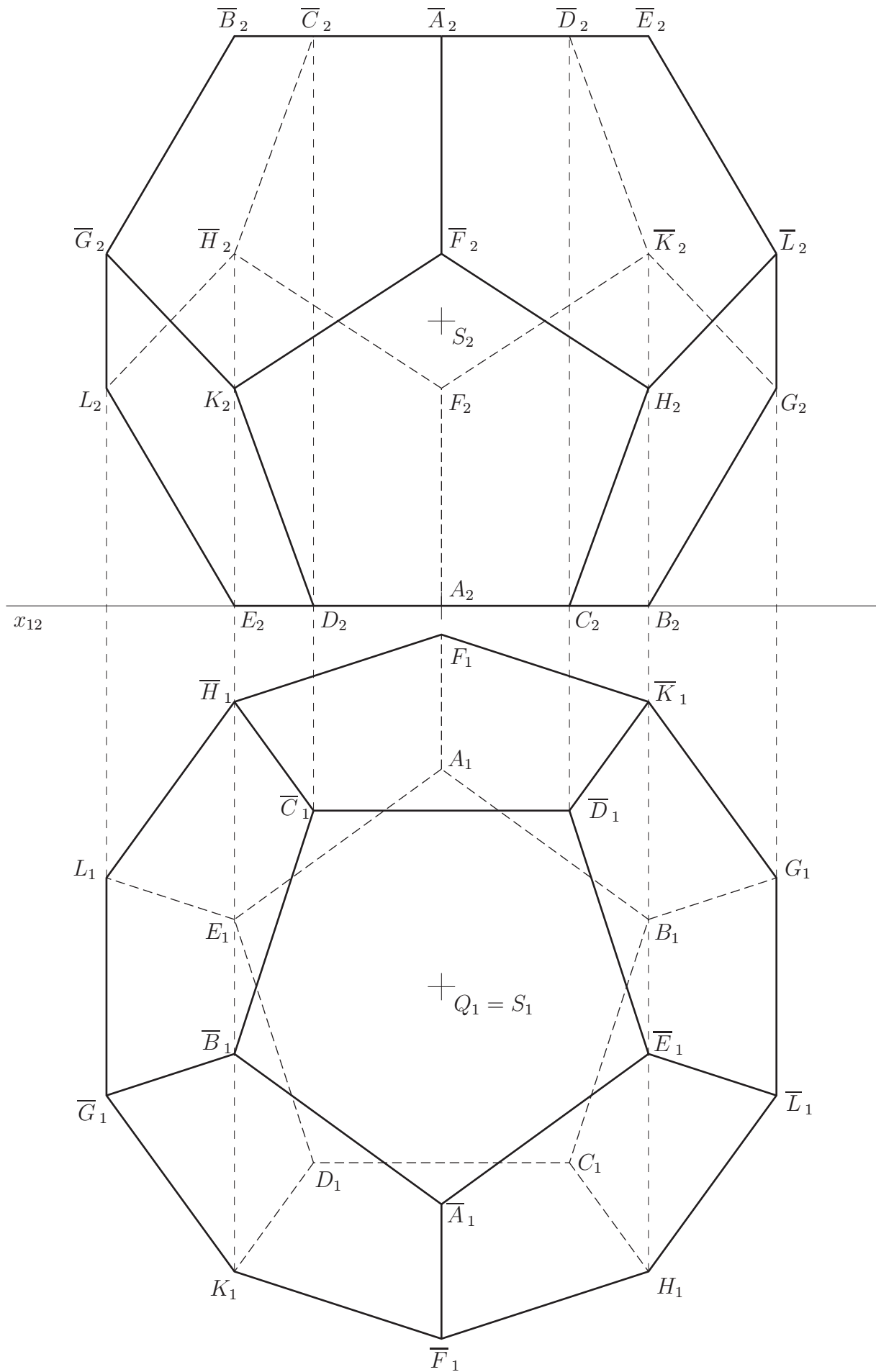
$$z_{\bar{F}} = |\bar{F}_1(\bar{F})| = \bar{r} = \text{poloměr kružnice } \ell$$

$$z_{\bar{F}} = z_{\bar{G}} = z_{\bar{H}} = z_{\bar{K}} = z_{\bar{L}} = \bar{r}$$

10. bod S_2 je střed úsečky $F_2\bar{F}_2$
 \bar{A}_2 – bod souměrný k A_2 podle S_2
 $z_{\bar{A}} = \bar{r} + r$

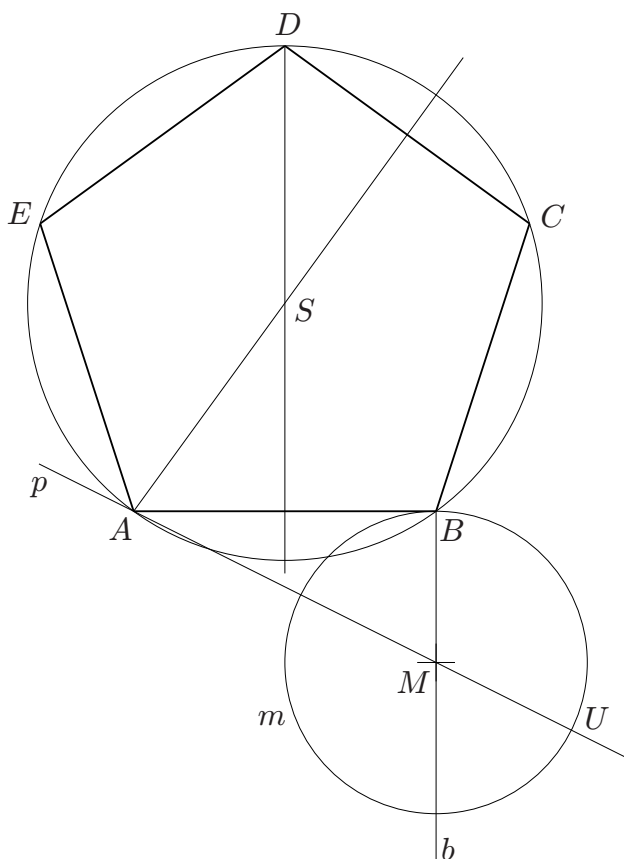
11. zobrazení tělesa, viditelnost

V měřítku 1:1.



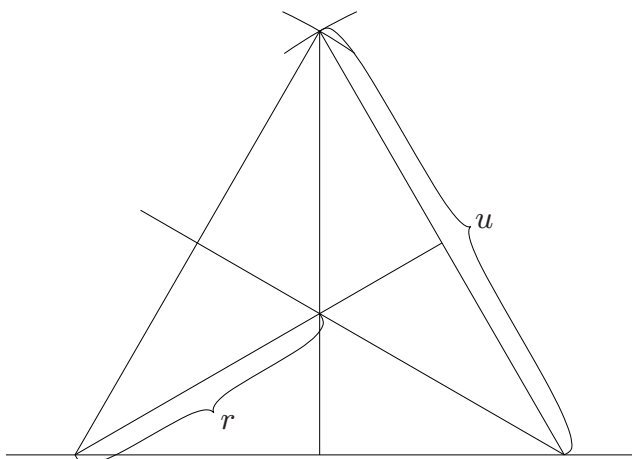
Příklad 2A4 na výšku, \underline{MP} : $O[10, 5 ; 15]$

Zobrazte pravidelný dvanáctistěn o velikosti hrany 4 cm, jehož tělesová úhlopříčka $A\bar{A}$ je kolmá k půdorysně π , $A[0, 6, 0]$, $z_{\bar{A}} > 0$.



Nejdříve sestrojíme pravidelný pětiúhelník $ABCDE$, známe-li jeho stranu $|AB| = 4$ cm.

- úsečka AB velikosti 4
- $b : B \in b, b \perp AB$
- $M \in b, |MB| = \frac{1}{2}|AB|$
 $p = AM$
- $m(M, |MB|)$
 $U \in m \cap p$ (U není vnitřní bod úsečky AM)
 $|AU| =$ velikost úhlopříčky pětiúhelníka
označme $|AU| = u$
- vrchol C: $|AC| = u, |BC| = 4$
vrchol E: $|AE| = 4, |BE| = u$
vrchol D: $|CD| = 4, |ED| = 4$
- snadno již sestrojíme kružnici pětiúhelníku opsanou (střed S , poloměr $|SA|$)
 $SD \perp AB$
 $AS \perp CD$



Z vrcholu A dvanáctistěnu vycházejí 3 hrany AB, AE, AF .

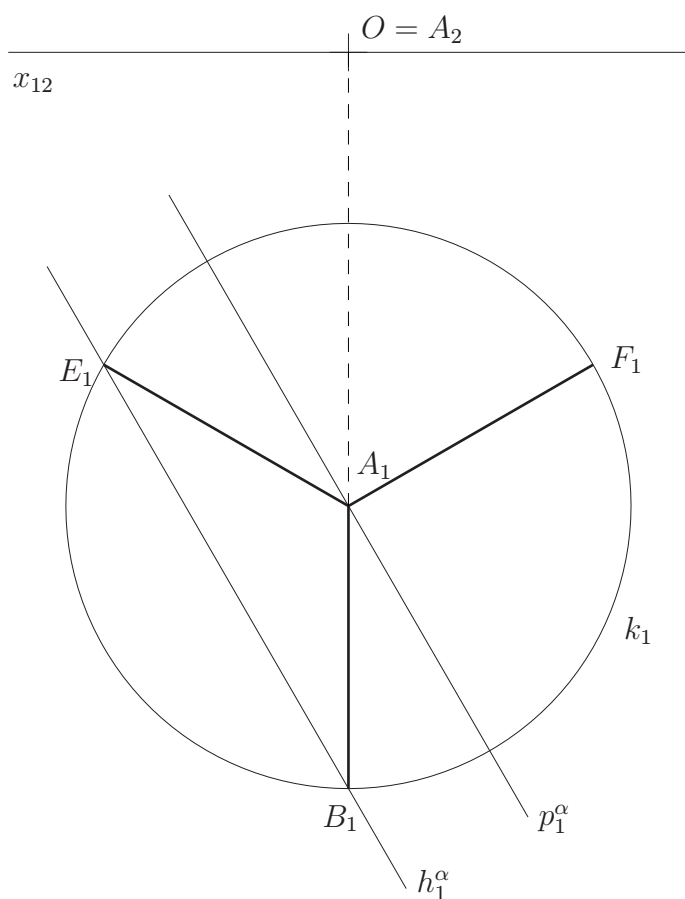
Protože $\overline{AA} \perp \pi$, úhlopříčky BE, EF a FB pětiúhelníků stěn obsahující vrchol A jsou rovnoběžné s půdorysnou.

$$1. |B_1E_1| = |E_1F_1| = |F_1B_1| = u$$

B_1, E_1, F_1 jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka o straně u a středu A_1

body B_1, E_1, F_1 leží na kružnici $k_1(A_1, r = |A_1B_1|)$

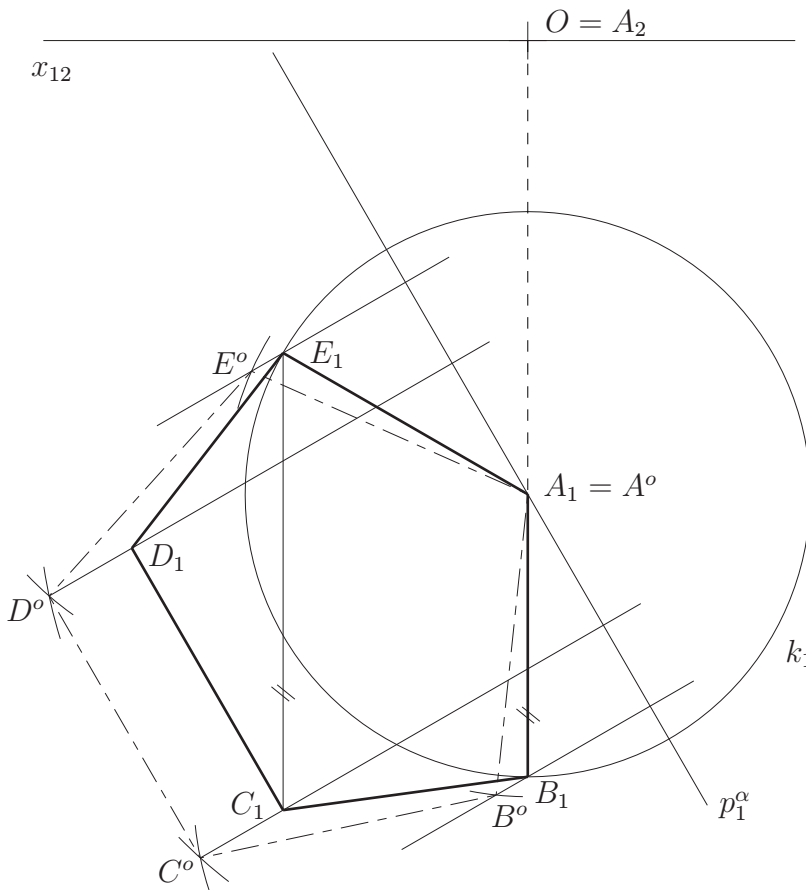
poloměr r určíme pomocnou konstrukcí rovnostranného trojúhelníka o straně u volme bod B tak, že $x_B = 0$ a $y_B > y_A$



Přímka EB je hlavní přímka 1. osnovy roviny α , roviny pětiúhelníka $ABCDE$.

$$2. E_1B_1 = h_1^\alpha$$

$$p_1^\alpha : A_1 \in p_1^\alpha, p_1^\alpha \parallel h_1^\alpha$$



Otočíme rovinu α kolem p^α do půdorysny. V otočení sestrojíme pravidelný pětiúhelník $A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ E^\circ$.

3. využíváme pravouhlou afinitu s osou p_1^α

$$B_1 B^\circ \perp p_1^\alpha, |A_1 B^\circ| = 4,$$

$$E_1 E^\circ \perp p_1^\alpha, |A_1 E^\circ| = 4$$

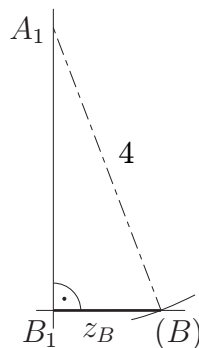
sestrojíme pravidelný pětiúhelník $A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ E^\circ$

rovnoběžnost se v afinitě zachovává:

$$A^\circ B^\circ \parallel C^\circ E^\circ \rightarrow A_1 B_1 \parallel C_1 E_1$$

$$(C_1 C^\circ \perp p_1^\alpha)$$

$A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ je půdorys pravidelného pětiúhelníka $ABCDE$



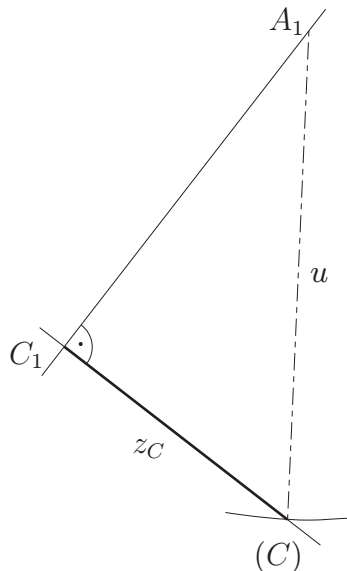
4. abychom sestrojili body B_2 a E_2 , určíme $z_B = z_E$

$$\triangle AB_1 B : |AB| = 4$$

$$\angle(AB_1 B) = 90^\circ$$

sestrojíme bod (B)

$$z_B = |B_1(B)| = z_E$$



5. abychom sestrojili body C_2 a D_2 , určíme $z_C = z_D$

$$\triangle AC_1 C : |AC| = u$$

$$\angle(AC_1 C) = 90^\circ$$

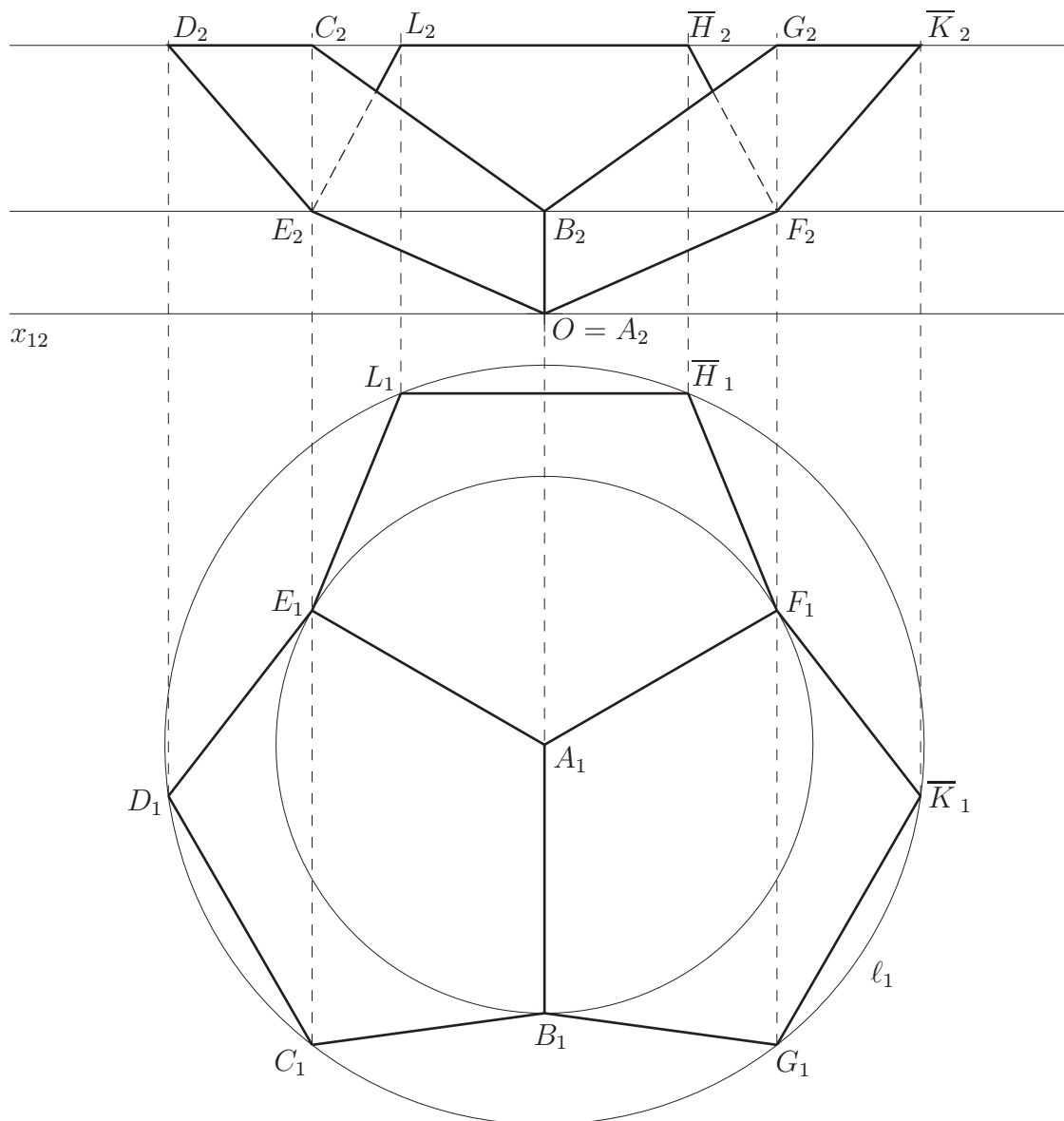
sestrojíme bod (C)

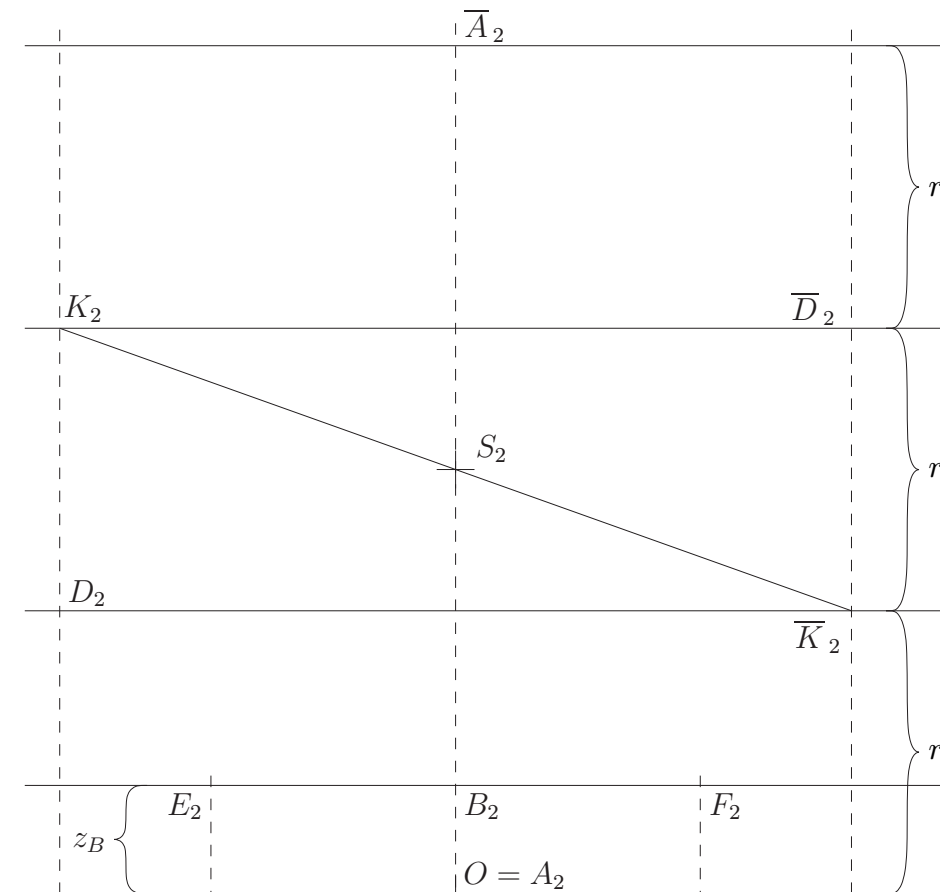
$$z_C = |C_1(C)| = z_D$$

pokud rýsujeme přesně, je $z_C = z_D = r = \text{poloměr } k_1$

6. Půdorysy pravidelných pětiúhelníků $AEL\bar{H}F$ a $AF\bar{K}GB$ jsou pětiúhelníky shodné s $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Body $C_1, D_1, L_1, \bar{H}_1, \bar{K}_1, G_1$ leží na kružnici $\ell_1(A_1, |A_1C_1|)$.





7. bod S je středem souměrnosti tělesa

$$S_1 = A_1$$

sestrojíme půdorysy vrcholů $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{H}, \bar{K}, \bar{L}$, které jsou souměrné k bodům $A, B, C, D, E, F, G, \bar{H}, \bar{K}, L$

$$\bar{A}_1 = A_1$$

$\bar{B}_1, \bar{E}_1, \bar{F}_1$ leží na k_1

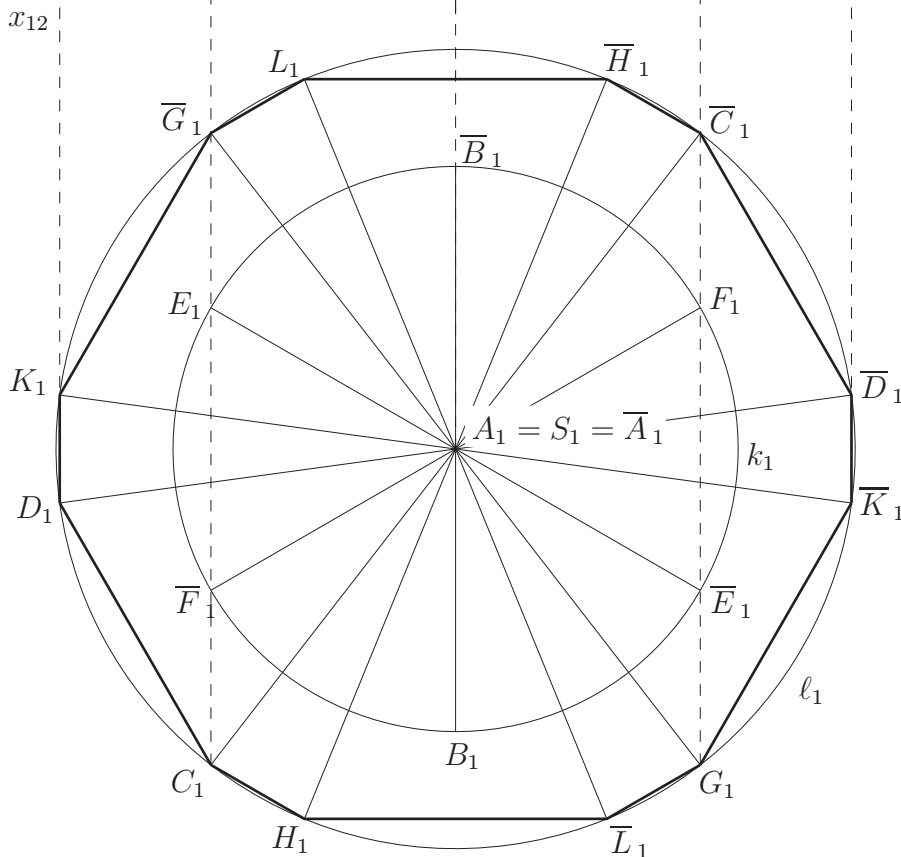
$\bar{C}_1, \bar{D}_1, \bar{G}_1, H_1, K_1, \bar{L}_1$ leží na ℓ_1

lomená čára

$$C_1 D_1 K_1 \bar{G}_1 L_1 \bar{H}_1 \bar{C}_1$$

$$\bar{D}_1 \bar{K}_1 G_1 \bar{L}_1 H_1 C_1$$

je obrysová čára dvanáctistěnu v půdoryse, její delší úsečky jsou délky 4, její kratší úsečky mají délku rovnou z_B



8. určíme z -ovou souřadnici bodu K

sklopíme půdorysně promítací lichoběžník úsečky DK

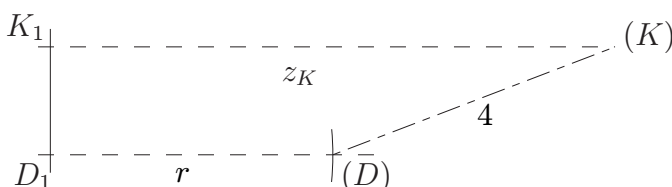
$$z_D = r, |(D)(K)| = 4$$

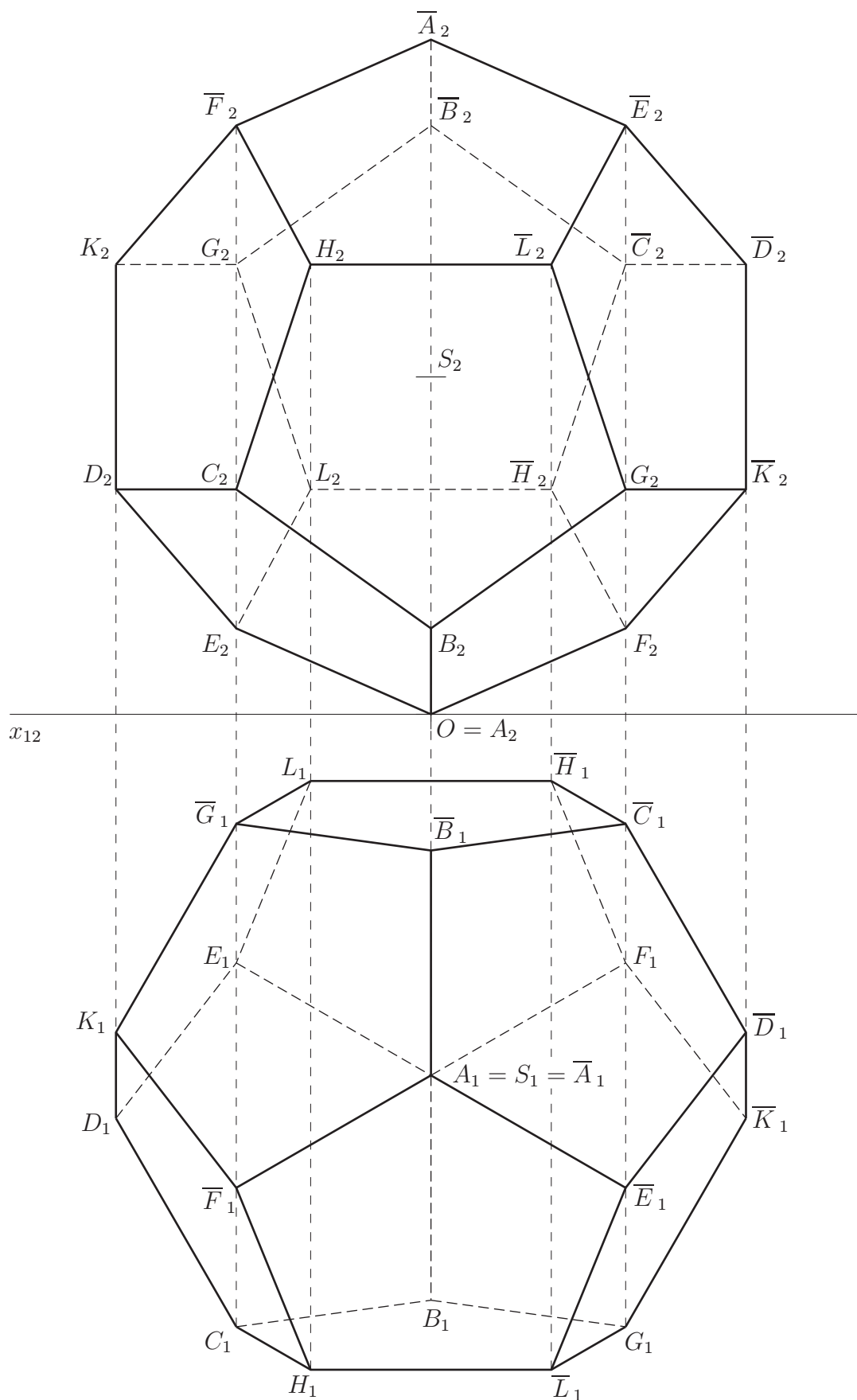
$$\text{pak } |K_1(K)| = z_K$$

při přesném rýsování je $z_K = 2r = 2 \cdot$ poloměr k_1

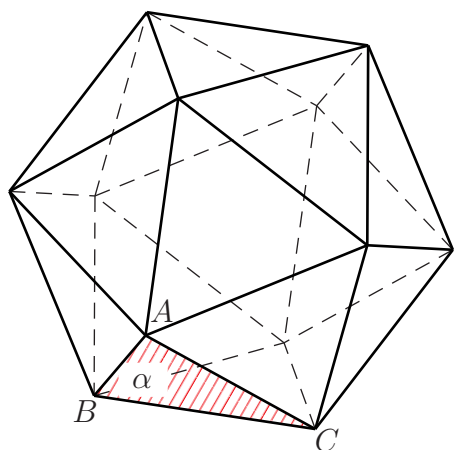
9. střed úsečky $K_2 \bar{K}_2$ je bod S_2

sestrojíme nárysy všech zbývajících vrcholů tělesa (využíváme souměrnosti podle S_2)



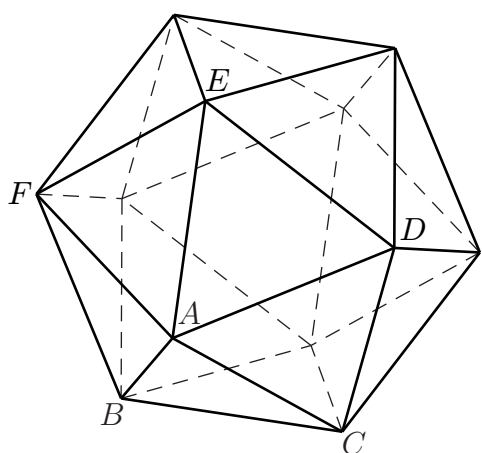


PRAVIDELNÝ DVACETISTĚN

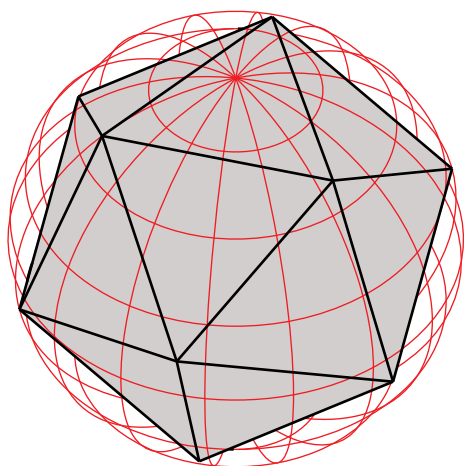


Každá stěna pravidelného dvacetistěnu je rovnostranný trojúhelník.

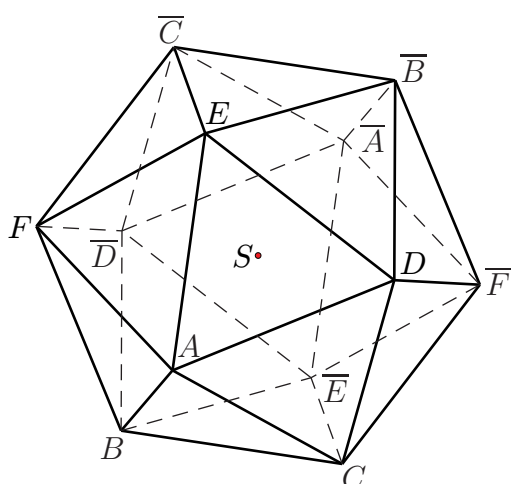
Označme vrcholy jedné stěny A, B, C a rovinu této stěny označme α .



Z každého vrcholu dvacetistěnu vychází 5 hran. Označme hrany vycházející z vrcholu A takto: AB, AC, AD, AE, AF .



Pravidelný dvacetistěn lze vepsat do kulové plochy $\kappa(S, |SA|)$, bod S je středem souměrnosti tělesa.



Označme další vrcholy dvacetistěnu takto:

- vrchol souměrný k vrcholu A podle středu S označme \bar{A} ,
- vrchol souměrný k vrcholu B podle středu S označme \bar{B} ,
- \vdots
- vrchol souměrný k vrcholu F podle středu S označme \bar{F} .

Tedy bod S je středem úseček $A\bar{A}, B\bar{B}, \dots, F\bar{F}$.

Pravidelný dvacetistěn má 12 vrcholů.

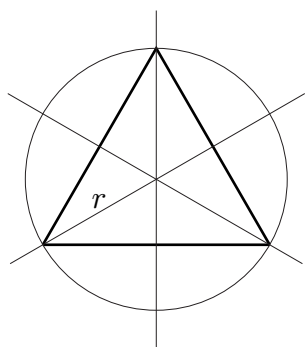
PRAVIDELNÝ DVACETISTĚN a jeho zobrazení v MP

Příklad 3

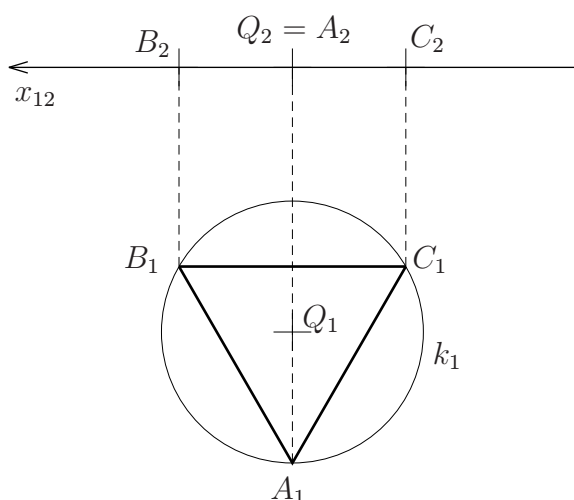
A4 na výšku, MP: $O[10, 5 ; 17]$

Zobrazte pravidelný dvacetistěn, jehož jedna stěna ABC o středu Q leží v půdorysně π , $Q[0; 7; 0]$, $A[0; ?; 0]$, $y_A > y_Q$, $|AB| = 6$.

(Obrázky v textu jsou v měřítku 1:2.)

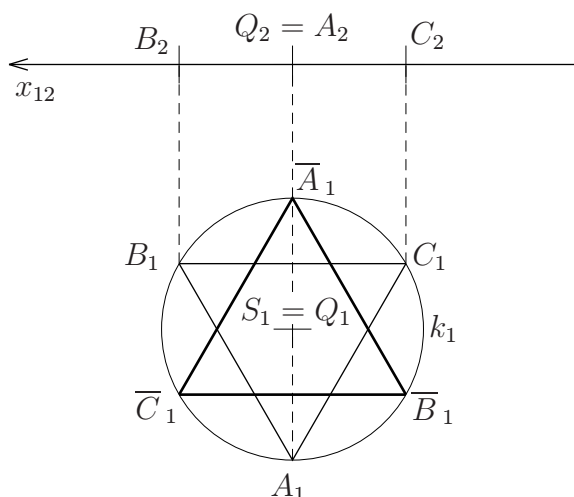


Sestrojíme pomocný rovnostranný trojúhelník o straně 6 a zjistíme poloměr r kružnice opsané.



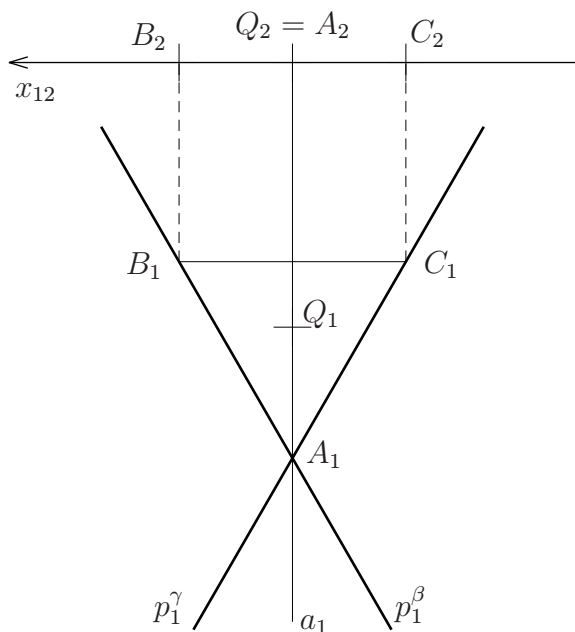
Zobrazíme rovnostranný trojúhelník ABC o středu Q ležící v π .

1. $k_1(Q_1; r)$
 $A_1[0; 7 + r; 0]$
 rovnostranný $\triangle A_1B_1C_1$ vepsaný do kružnice k_1
 (označení po směru hodinových ručiček)
2. nárysem trojúhelníka ABC je úsečka B_2C_2



Vrcholy \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} stěny protilehlé ke stěně ABC jsou body souměrné k bodům A , B , C podle středu S .

3. $S_1 = Q_1$
 \bar{A}_1 je bod souměrný k A_1 podle S_1
 $\bar{A}_1 \in k_1$
 body $A_1, \bar{C}_1, B_1, \bar{A}_1, C_1, \bar{B}_1$ jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníka vepsaného do kružnice k_1

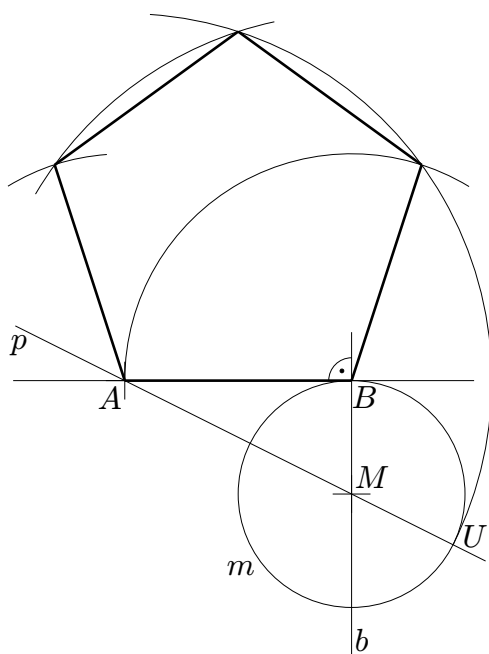


Označme β rovinu pravidelného pětiúhelníka $AB\overline{D}\overline{C}E$, $p^\beta = AB$.

Označme γ rovinu pravidelného pětiúhelníka $AC\overline{F}\overline{B}E$, $p^\gamma = AC$.

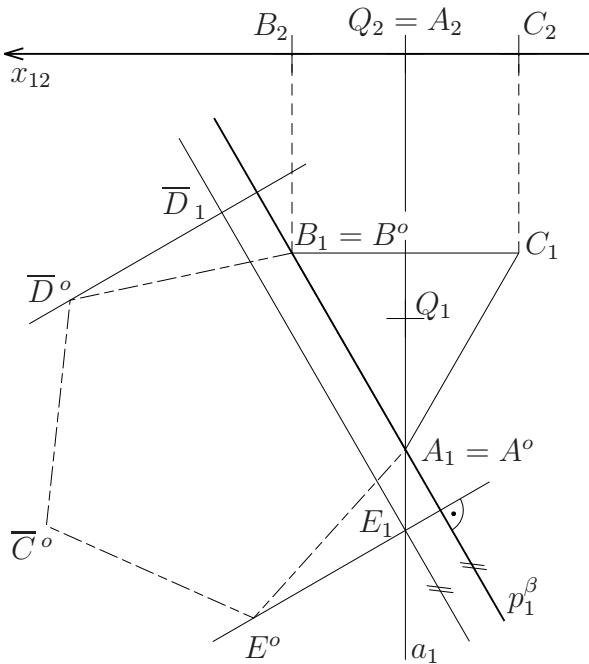
Odchylka roviny β od půdorysny a odchylka roviny γ od půdorysny je stejná. Označme a průsečnici rovin β a γ , $a = \beta \cap \gamma = AE$.

- 4. $p_1^\beta = A_1B_1$
- $p_1^\gamma = A_1C_1$
- a_1 je osou úhlu přímek p_1^β a p_1^γ



Pomocná konstrukce; konstrukce pravidelného pětiúhelníka o straně $|AB| = 6$.
(Viz také příklad 2.)

- a) úsečka AB velikosti 6
- b) přímka $b : B \in b, b \perp AB$
- c) bod $M : M \in b, |BM| = \frac{1}{2}|AB| = 3$
- d) přímka $p = AM$
kružnice $m(M, |MB|)$
- e) bod $U : U \in m \cap p$
(U není vnitřní bod úsečky AM)
 $|AU|$ velikost úhlopříčky pětiúhelníka,
označme $|AU| = u$



Zobrazíme pravidelný pětiúhelník $AB\bar{D}\bar{C}E$ v rovině β a také pravidelný pětiúhelník $AC\bar{F}\bar{B}E$ v rovině γ .

Otočíme rovinu β kolem p^β do půdorysny.

5. sestrojíme otočený pětiúhelník $A^\circ B^\circ \bar{D}^\circ \bar{C}^\circ E^\circ$

$$A^\circ = A$$

$$B^\circ = B$$

$$E^\circ : |AE^\circ| = 6, |BE^\circ| = u$$

(z předchozí konstrukce)

$$\bar{D}^\circ : |B\bar{D}^\circ| = 6, |A\bar{D}^\circ| = u$$

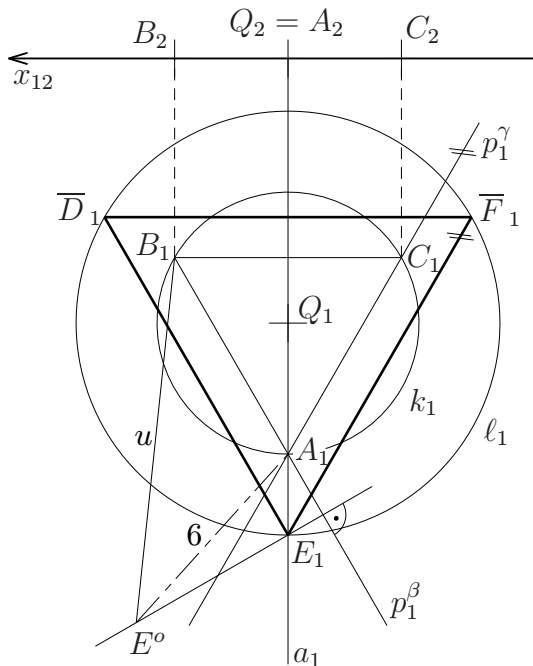
$$\bar{C}^\circ : |E^\circ\bar{C}^\circ| = |\bar{D}^\circ\bar{C}^\circ| = 6$$

6. využijeme pravoúhlé afinity s osou p_1^β

$$E_1 \in a_1, E_1E^\circ \perp p_1^\beta$$

$$E^\circ\bar{D}^\circ \parallel p_1^\beta \parallel E_1\bar{D}_1, |E_1\bar{D}_1| = u$$

(bod \bar{C}_1 je sestrojen souměrně k C_1 podle S_1)



7. rovinu γ nebudeme již otáčet, konstrukce byla stejná

$$E_1\bar{F}_1 \parallel p_1^\gamma, |E_1\bar{F}_1| = |E_1\bar{D}_1| = u$$

$E_1, \bar{D}_1, \bar{F}_1$ jsou vrcholy rovnostranného trojúhelníka vepsaného do kružnice $\ell_1(Q_1, \bar{r} = |Q_1E_1|)$

8. určíme z -ovou souřadnici bodu E

využijeme $\triangle A E_1 E$:

$$|AE| = \text{strana tělesa} = 6$$

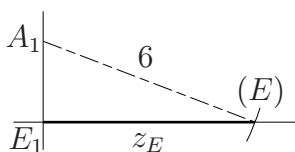
$$\angle(AE_1E) = 90^\circ$$

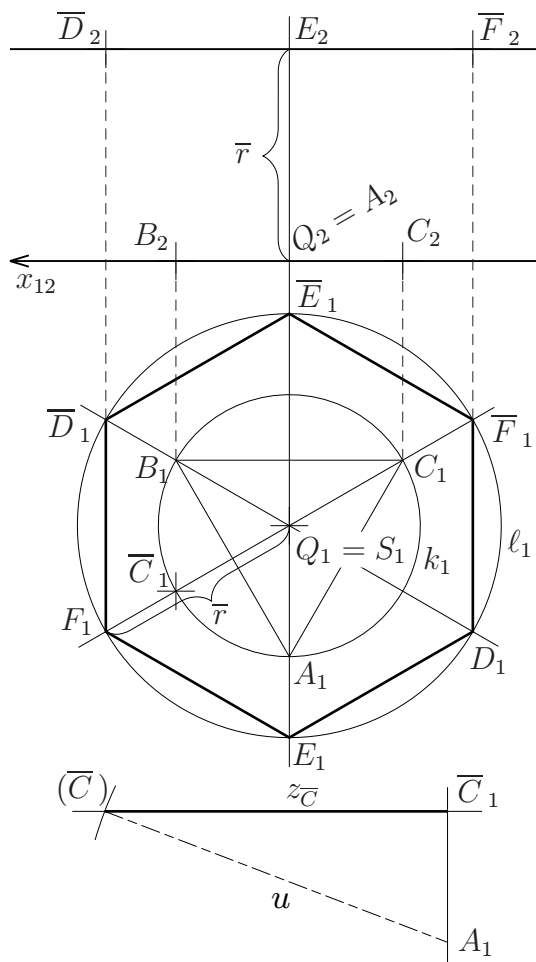
sestrojíme bod (E)

při přesném rýsování je

$$z_E = |E_1(E)| = \bar{r} = \text{poloměr kružnice } \ell$$

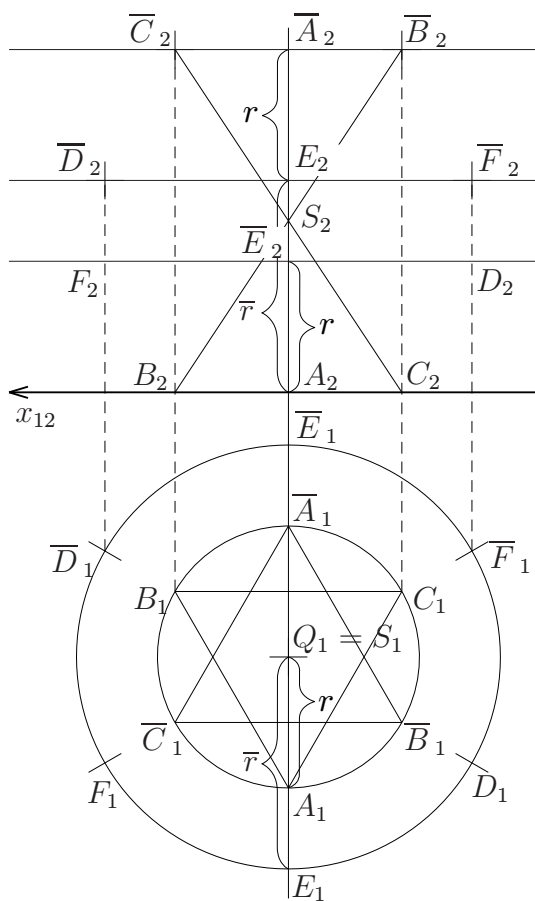
$$z_E = z_{\bar{D}} = z_{\bar{F}} = \bar{r}$$





9. bod \bar{E}_1 je souměrný k E_1 podle S_1
 bod F_1 je souměrný k \bar{F}_1 podle S_1
 bod D_1 je souměrný k \bar{D}_1 podle S_1
 body $E_1, D_1, \bar{F}_1, \bar{E}_1, \bar{D}_1, F_1$ jsou vrcholy pravidelného šestiúhelníka vepsaného do kružnice ℓ_1 a tento šestiúhelník je obrysem půdorysu dvacetistěnu

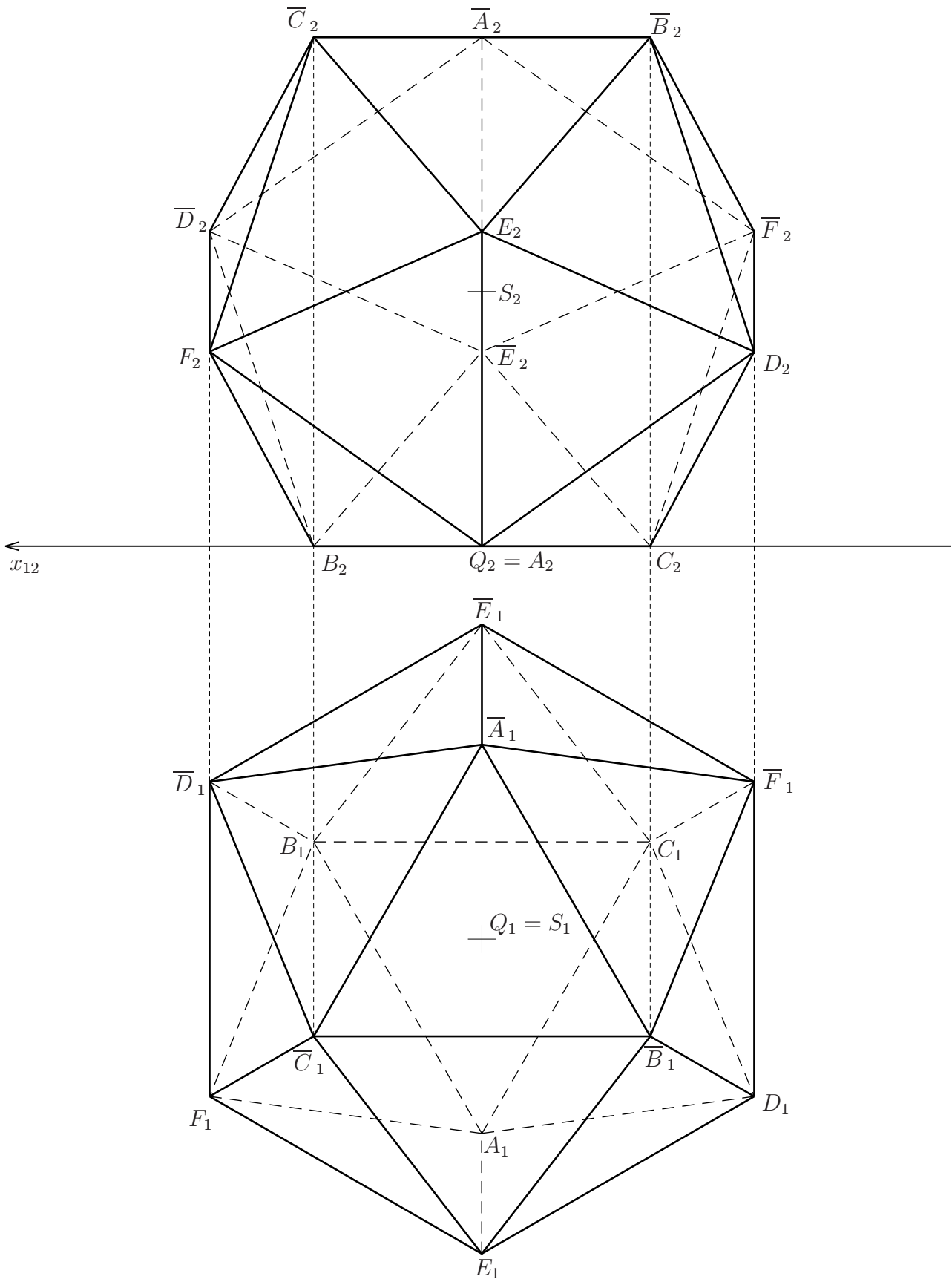
10. určíme z -ovou souřadnici bodu \bar{C}
 využijeme $\triangle A \bar{C}_1 \bar{C}$:
- $|A\bar{C}| = u$ (u je velikost úhlopříčky pětiúhelníka $AB\bar{D}\bar{C}E$)
 - $\angle(A\bar{C}_1\bar{C}) = 90^\circ$
 - sestrojíme bod (\bar{C})
- při přesném rýsování je
 $z_{\bar{C}} = |\bar{C}_1(\bar{C})| = r + \bar{r} = \text{poloměr } k + \text{poloměr } \ell$
 $z_{\bar{C}} = z_{\bar{A}} = z_{\bar{B}} = r + \bar{r}$



11. S_2 je střed úsečky $A_2\bar{A}_2, B_2\bar{B}_2, C_2\bar{C}_2$
 bod \bar{E}_2 je souměrný k E_2 podle S_2
 $z_{\bar{E}} = z_F = z_D = r = \text{poloměr } k$

12. zobrazení tělesa a viditelnost

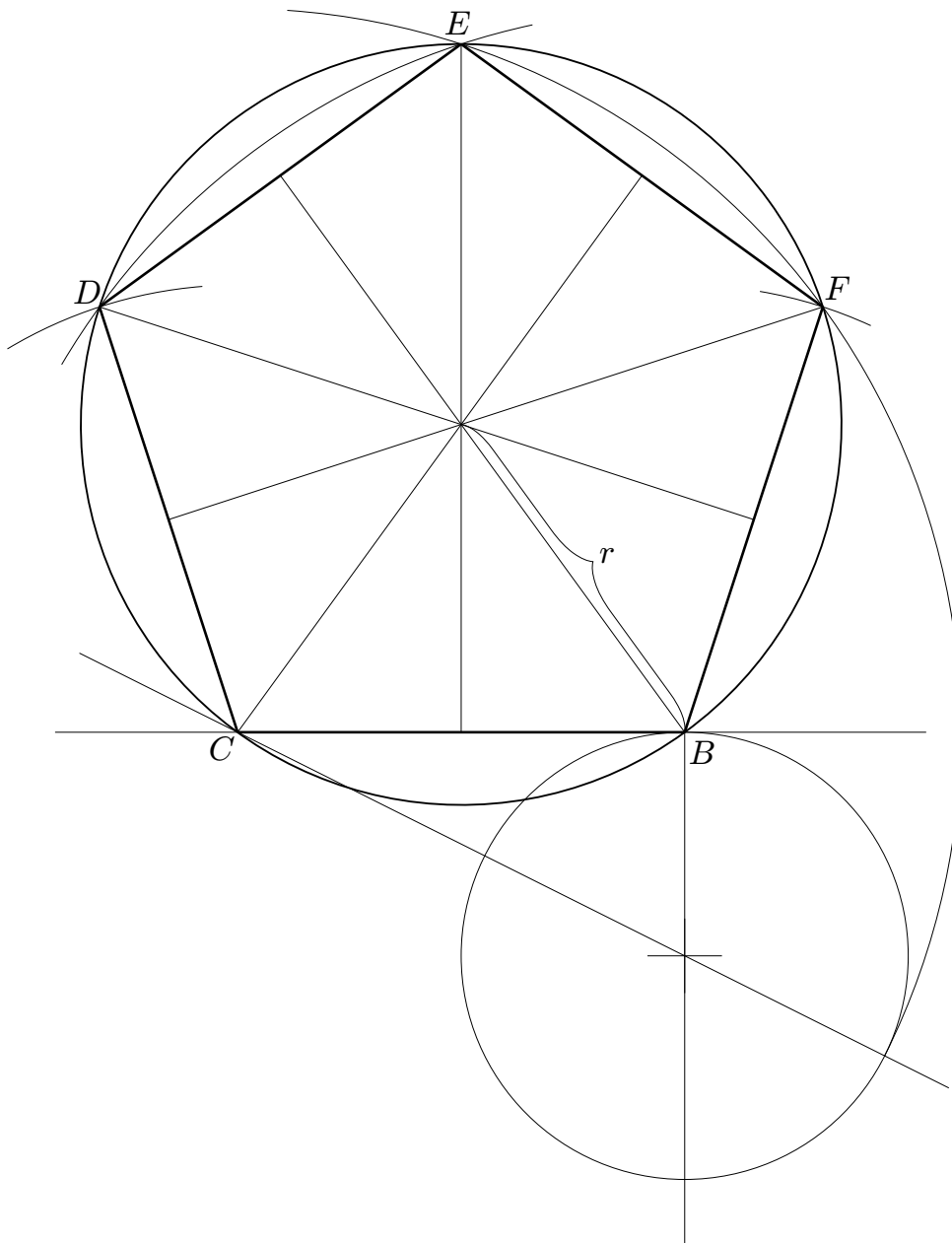
V měřítku 1:1



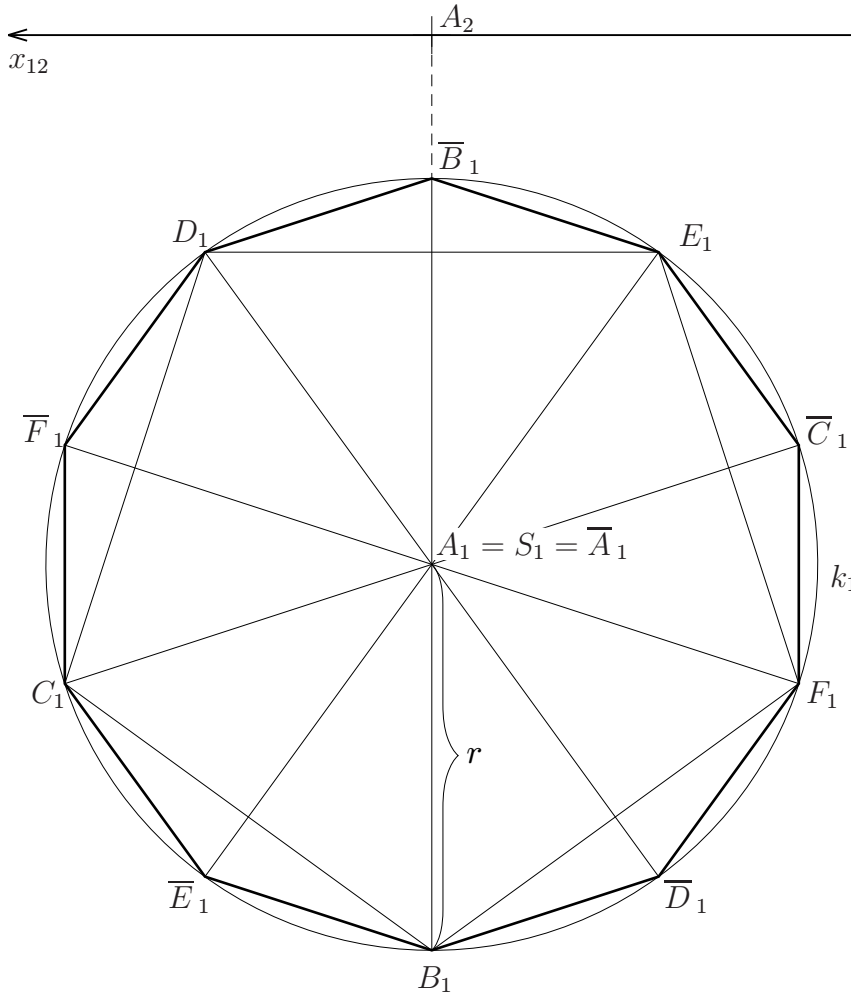
Příklad 4A4 na výšku, MP: $O[10, 5 ; 15]$

Zobrazte pravidelný dvacetistěn o velikosti hrany 6cm, jehož tělesová úhlopříčka \overline{AA} je kolmá k půdorysně π , $A[0; 7; 0]$, $z_{\overline{A}} > 0$.

Nejdříve sestrojíme pravidelný pětiúhelník $BCDEF$, jehož strana má velikost $|BC| = 6\text{cm}$ (viz příklad č.3 a také č.2). Označme r poloměr kružnice pětiúhelníku opsané.



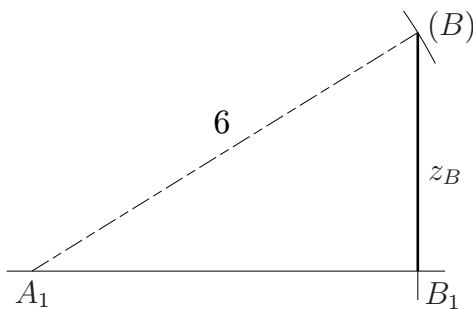
Z vrcholu A dvacetistěnu vychází 5 hran AB, AC, AD, AE a AF . Pravidelný pětiúhelník $BCDEF$ o straně 6 leží v rovině rovnoběžné s půdorysnou.



- $B_1C_1D_1E_1F_1$ je pravidelný pětiúhelník o straně 6 a středu A_1 , vrcholy pětiúhelníka leží na kružnici $k_1(A_1, r)$ (značeno po směru hodinových ručiček) zvolme bod B tak, že $x_B = 0$ a $y_B > y_A$

Označme $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}, \bar{E}$ a \bar{F} vrcholy tělesa souměrné k vrcholům A, B, C, D, E, F podle středu S .

- $S_1 = A_1 = \bar{A}_1$
 bod \bar{B}_1 je souměrný k B_1 podle S_1
 bod \bar{C}_1 je souměrný k C_1 podle S_1
 :
 bod \bar{F}_1 je souměrný k F_1 podle S_1
 $B_1\bar{E}_1C_1\bar{F}_1D_1\bar{B}_1E_1\bar{C}_1F_1\bar{D}_1$ je pravidelný desetiúhelník vepsaný do kružnice k_1 a tento desetiúhelník je obrysovou čarou půdorysu dvacetistěnu



- určíme z -ovou souřadnici bodu B

využijeme $\triangle A B_1 B$:

$$|AB| = 6$$

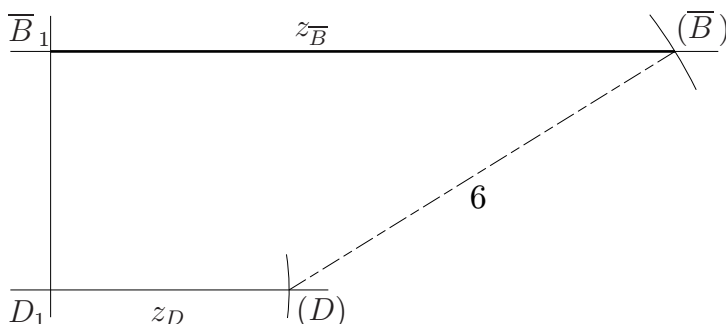
$$\angle(AB_1B) = 90^\circ$$

sestrojíme bod (B)

při přesném rýsování je

$z_B = |B_1\bar{E}_1| =$ strana pravidelného desetiúhelníka vepsaného kružnici k_1

$$z_B = z_C = z_D = z_E = z_F$$



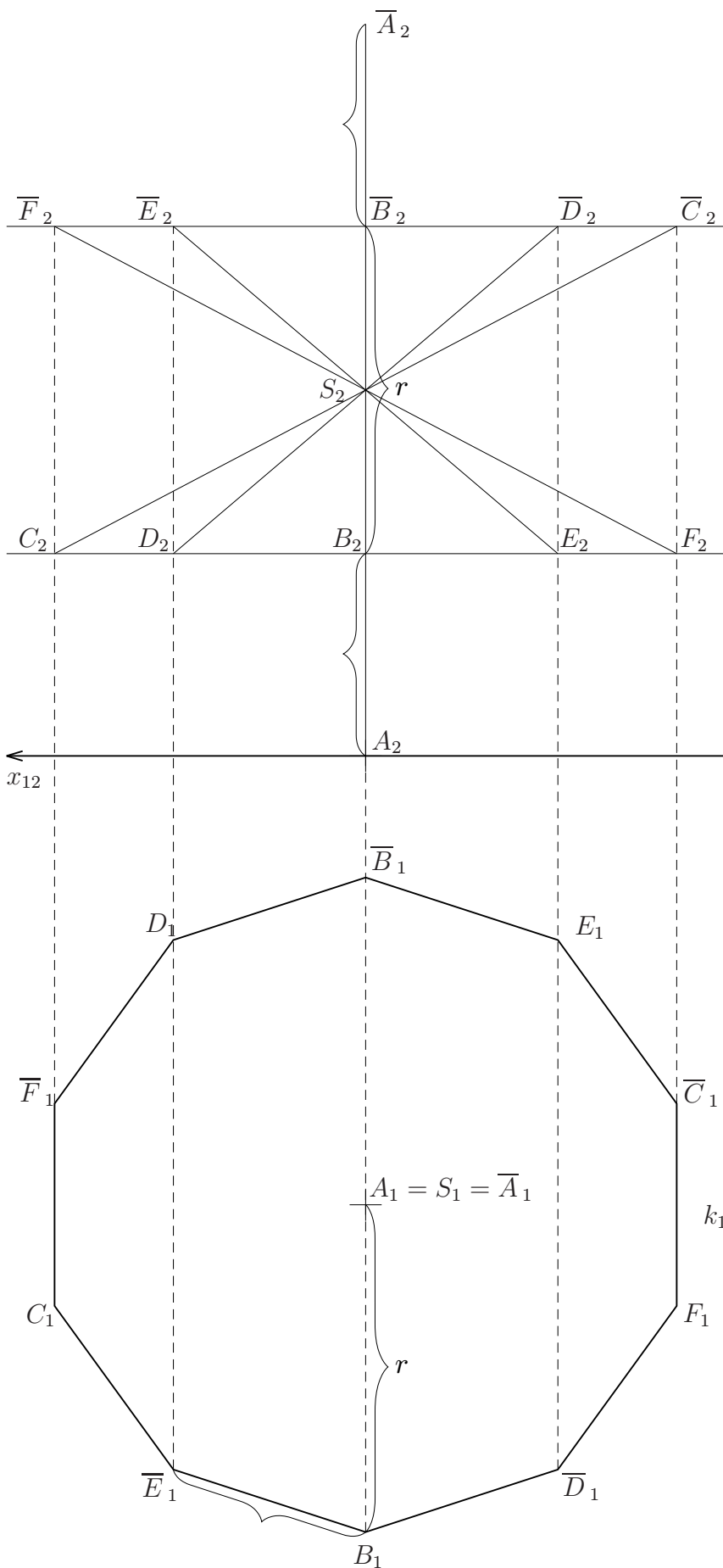
- určíme z -ovou souřadnici bodu \bar{B}

využijeme promítací lichoběžník úsečky $D\bar{B}$:

$$z_D = z_B, |D\bar{B}| = 6$$

při přesném rýsování je $z_{\bar{B}} = r + z_B$

$$z_{\bar{B}} = z_{\bar{C}} = z_{\bar{D}} = z_{\bar{E}} = z_{\bar{F}} = r + z_B$$



5. S_2 je střed úsečky $B_2\bar{B}_2$,
 $C_2\bar{C}_2, \dots, F_2\bar{F}_2$
 $z_{\bar{A}} = r + 2 \cdot z_B$

6. zobrazení tělesa a viditelnost

