OPPA

PRAHA PRAGUE PRAGA PRAG

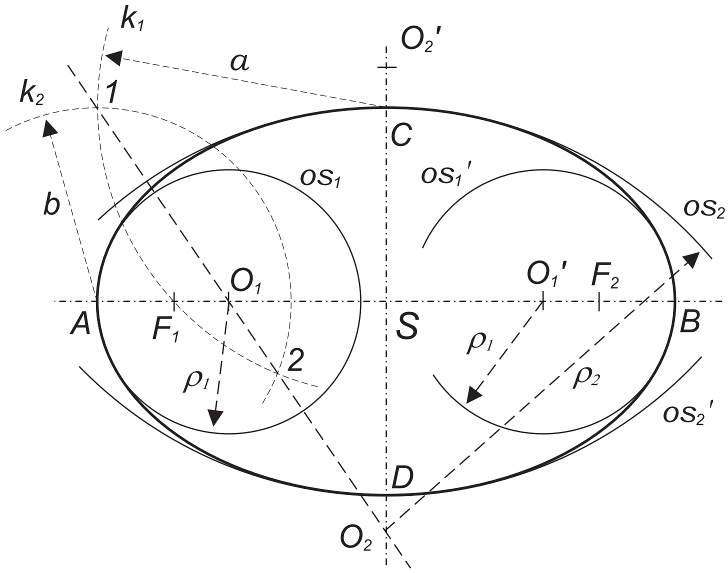
EVROPSKÁ UNIE

EVROPSKÝ SOCIÁLNÍ FOND
PRAHA & EU: INVESTUJEME DO VAŠÍ BUDOUCNOSTI

Deskriptivní geometrie I
Základní a pomocné konstrukce

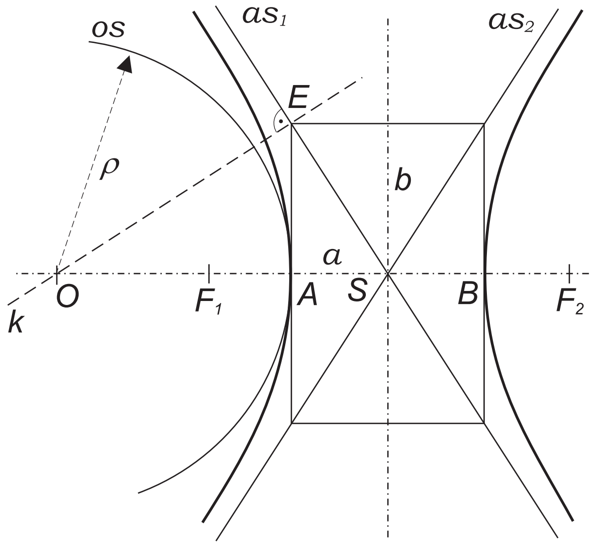
Konstrukce (hyper)oskulačních kružnic kuželoseček

Elipsa



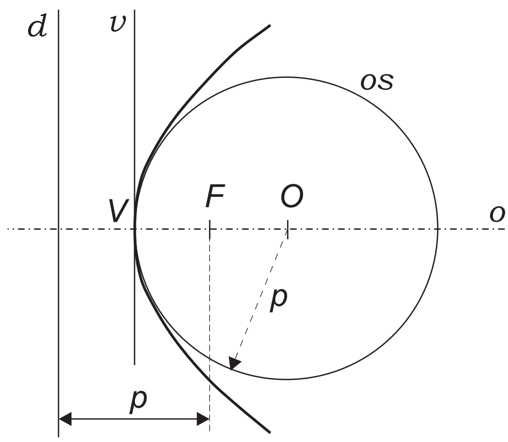
1. osy; vrcholy A, B, C, D; střed S
2. $k_1(C;\ a)$
3. $k_2(A;\ b)$
4. $\{1;2\} = k_1 \cap k_2$
5. $O_1 = \overleftrightarrow{12} \cap \overleftrightarrow{AB}$
6. $O_2 = \overleftrightarrow{12} \cap \overleftrightarrow{CD}$
7. $os_1(O_1;\ |O_1A|)$
8. $os_2(O_2;\ |O_2C|)$

Hyperbola



1. osy; vrcholy A, B; asymptoty as_1, as_2; střed S
2. $E,\ (E \in as_1) \wedge (|SE| = e)$
3. $k,\ (k \perp as_1) \wedge (E \in k)$
4. $O,\ O = k \cap \overleftrightarrow{AB}$
5. $os(O;\ |OA|)$

Parabola

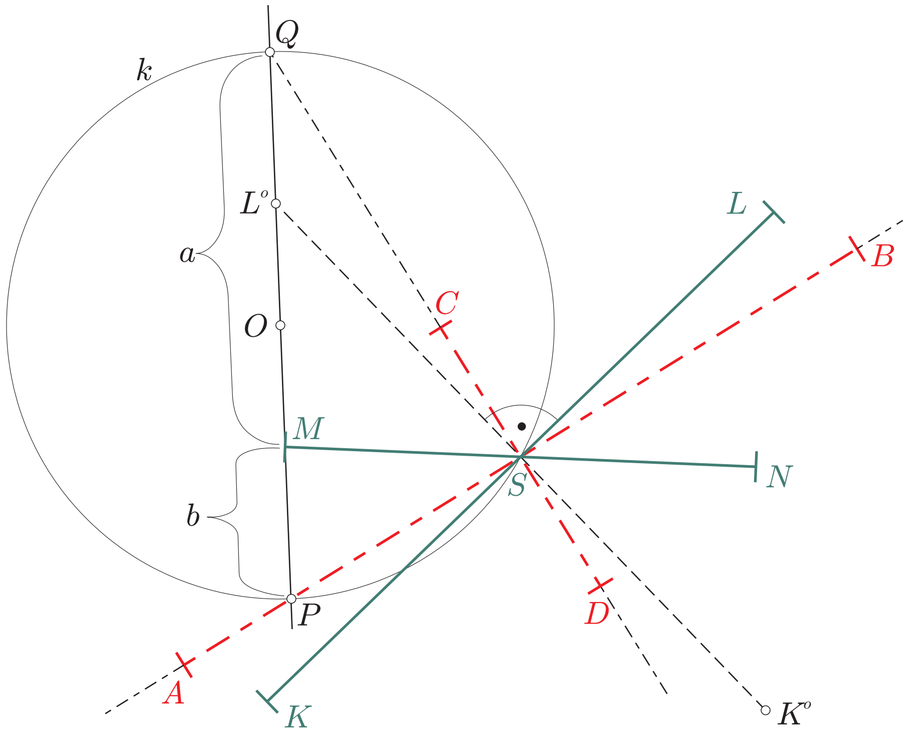


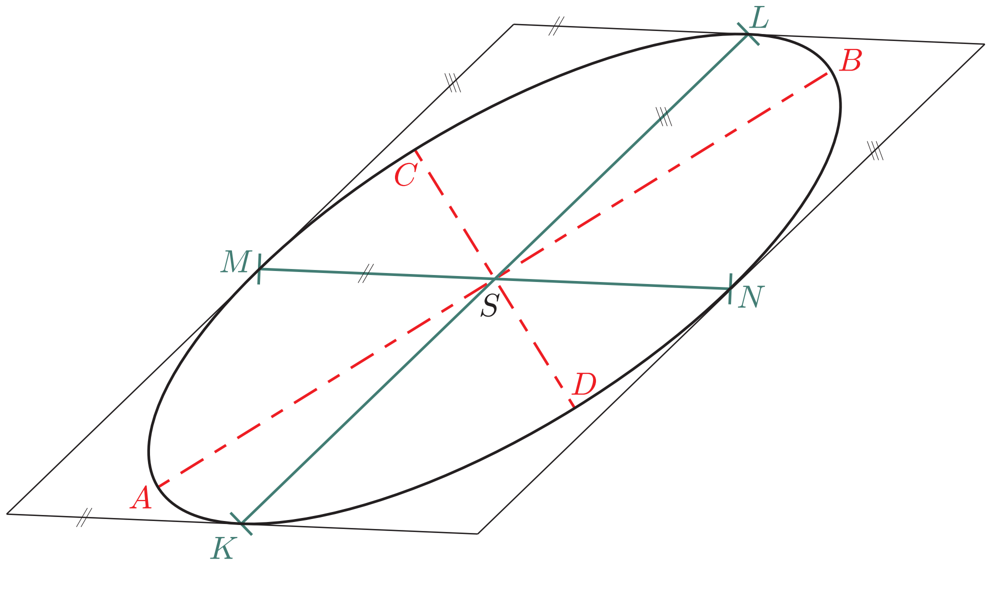
1. osa o; řídící přímka d; ohnisko F; vrchol V
2. $O,\ (O \in \overrightarrow{VF}) \wedge (|VO| = p)$
3. $os(O;\ p)$

Rytzova konstrukce

Dáno: omezené sdružené průměry elipsy: KL a MN
Výsledek: hlavní a vedlejší vrcholy elipsy

1. K^oL^o;
   delší ze sdružených průměrů otočíme o 90° kolem bodu S (střed elipsy)
   Pozn.: Lze otáčet i kratší průměr, ale konstrukce je méně přehledná a častěji dochází k nepřesnostem.
2. L^oM;
   sestrojíme spojnici jednoho z otočených bodů a bližšího krajního bodu druhého sdruženého průměru
3. $O = \frac{L^oM}{2}$;
   sestrojíme střed úsečky L^oM
4. $k(O, |OS|)$;
   sestrojíme kružnici k se středem v bodě O, která prochází středem elipsy S
5. P, Q;
   sestrojíme body P a Q – průsečíky přímky L^oM s kružnicí k
6. osy elipsy;
   přímky PS a QS jsou osy elipsy;
   hlavní osa směřuje do menšího z úhlů, které svírají sdružené průměry
7. velikosti poloos;
   velikost hlavní poloosy $a = |QM|$, velikost vedlejší poloosy $b = |PM|$
8. vrcholy A, B, C, D

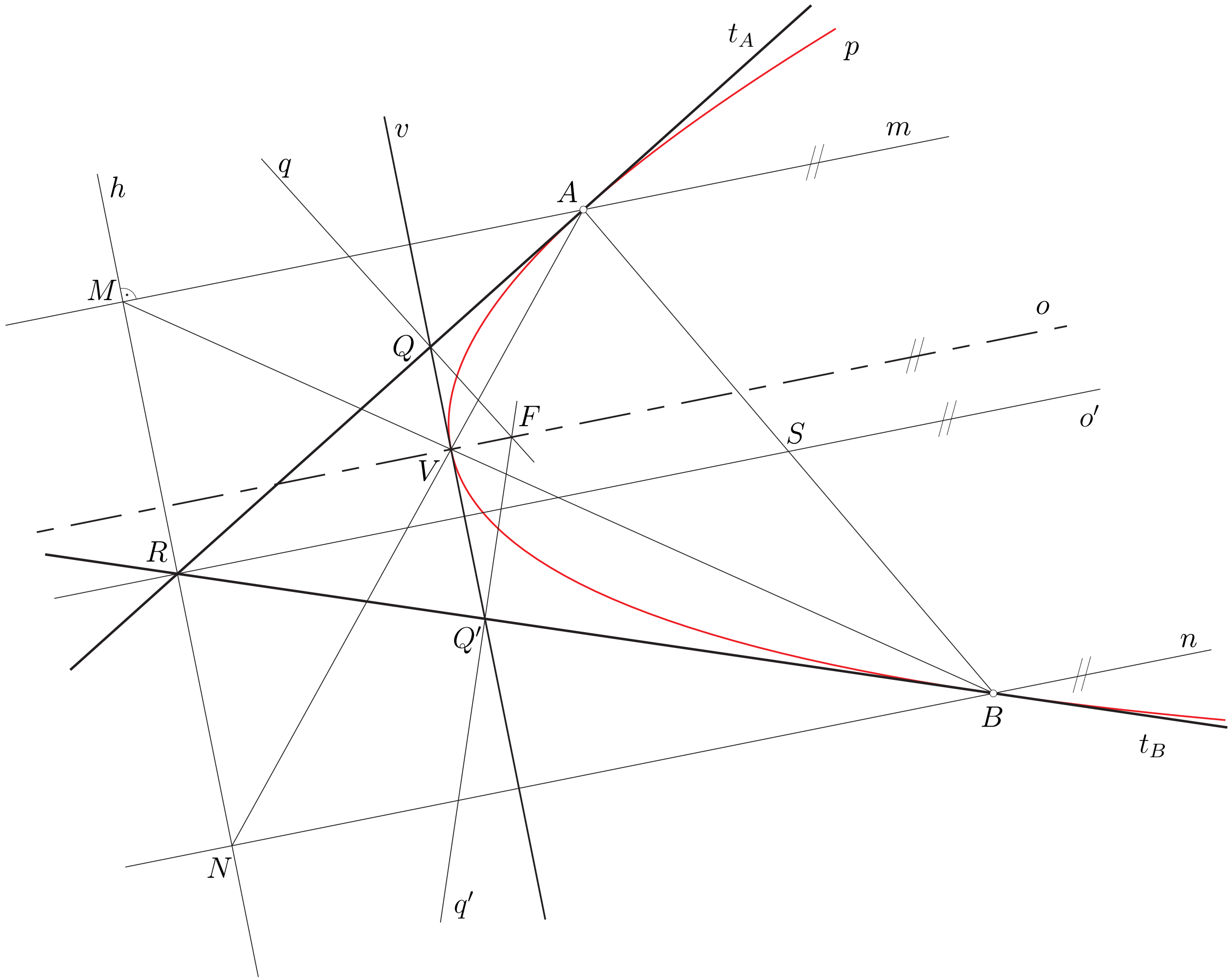




Lichoběžníková konstrukce prvků paraboly

Dáno: tečna paraboly t_A s bodem dotyku A, tečna paraboly t_B s bodem dotyku B
Výsledek: osa paraboly o, vrchol paraboly V, ohnisko paraboly F

1. S: S je střed úsečky AB
   R: $R = t_A \cap t_B$
2. o': $o' = \leftrightarrow RS$ (o' je rovnoběžná s osou)
3. h: $h \perp o'$, $R \in h$
4. m: $m \| o'$, $A \in m$
   n: $n \| o'$, $B \in n$
5. M: $M = m \cap h$
   N: $N = n \cap h$
   $AMNB$ je lichoběžník
6. vrchol paraboly V: $V = AN \cap BM$
7. osa paraboly o: $o \| o'$, $V \in o$
8. vrcholová tečna v: $v \perp o$, $V \in v$
9. Q: $Q = v \cap t_A$
   q: $q \perp t_A$, $Q \in q$
   (Q': $Q' = v \cap t_B$
   q': $q' \perp t_B$, $Q' \in q'$)
10. ohnisko paraboly F: $F = q \cap o \ = \ q' \cap o$

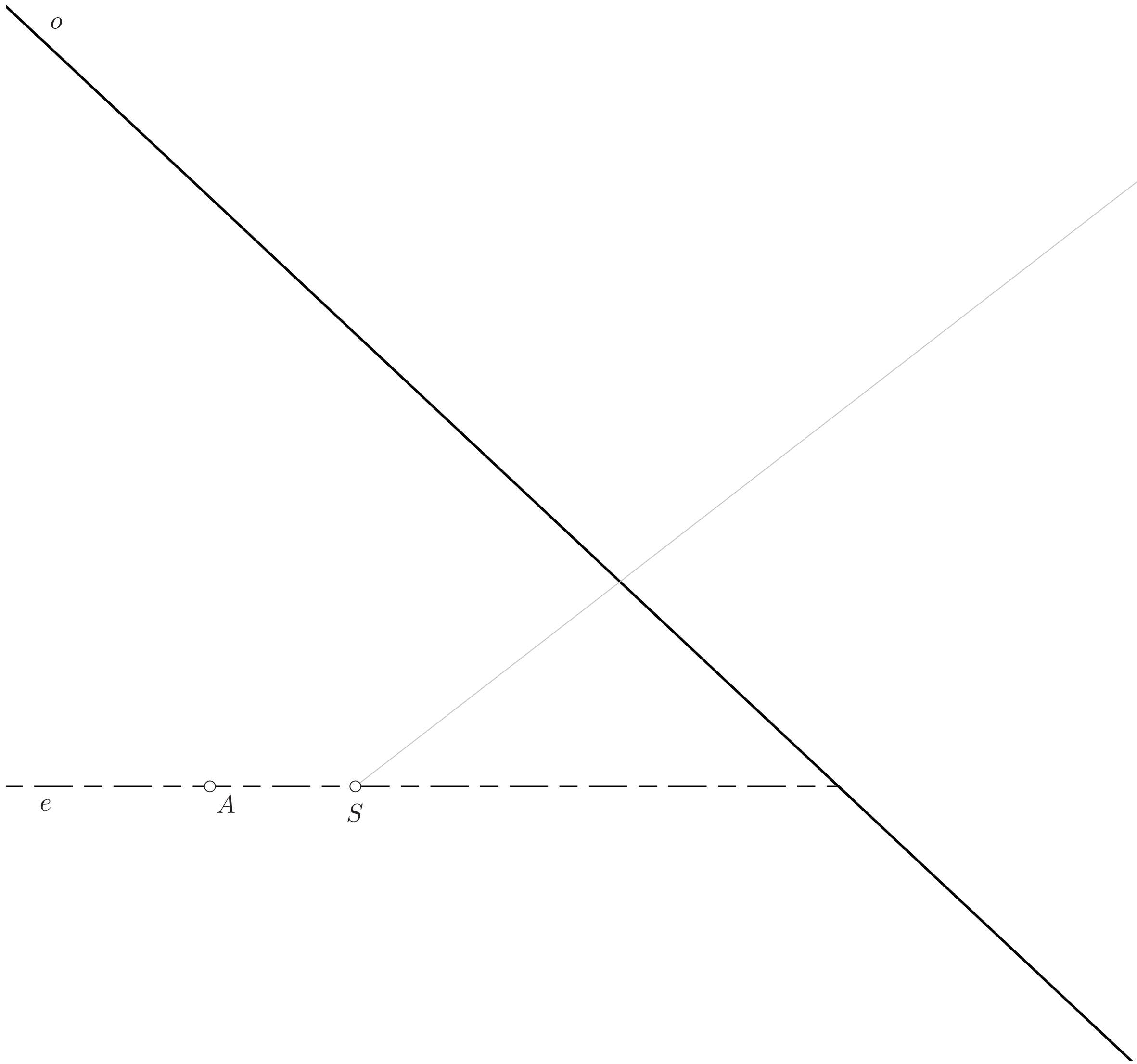


Obraz hyperboly v afinitě

Hyperbola h je dána svým vrcholem A, středem S a velikostí vedlejší poloosy 3cm. Osová afinita je dána osou o a dvojicí odpovídajících si bodů $S \to S'$.

Zobrazte hyperbolu h v dané osové afinitě.

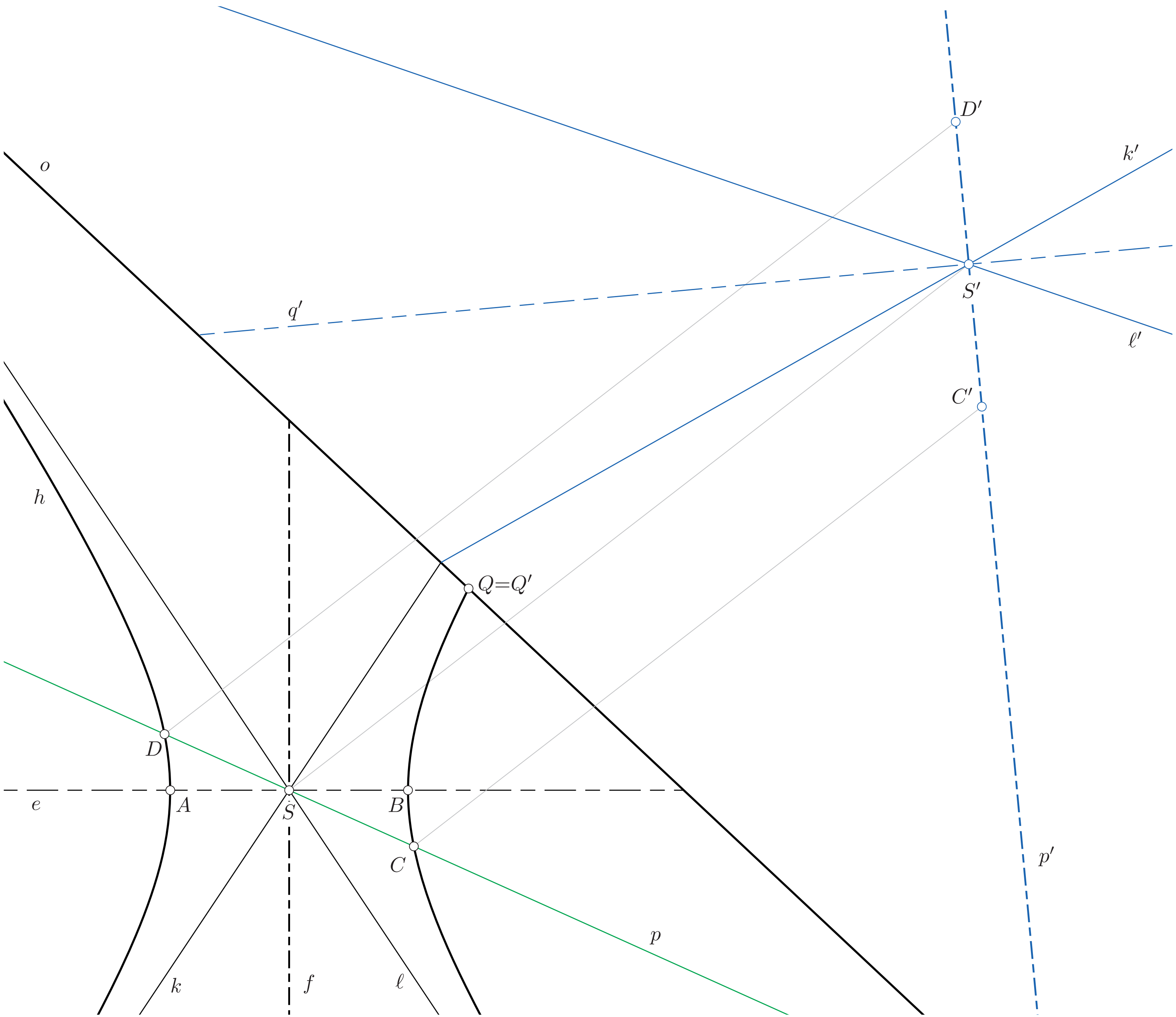
- Na str. 2 je provedena konstrukce asymptot a vrcholů hyperboly h' (obrazu hyperboly h) s využitím narýsované hyperboly h.
- Na str. 3 je provedena konstrukce asymptot a vrcholů hyperboly h' bez nutnosti rýsovat hyperbolu h.
- Na str. 4 jsou obě konstrukce v jednom obrázku včetně zobrazené hyperboly h i jejího obrazu v afinitě, hyperboly h'.



Obraz hyperboly v afinitě

Konstrukce asymptot a vrcholů hyperboly h' (obrazu hyperboly h) s využitím narýsované hyperboly h.

1. Zobrazíme hyperbolu h (hlavní osa e, vedlejší osa f, vrcholy A a B, asymptoty k a ℓ).
2. Sestrojíme přímky k' a ℓ' – obrazy přímek k a ℓ v dané afinitě.
   Obrazem asymptot hyperboly jsou asymptoty obrazu hyperboly. Tedy přímky k' a ℓ' jsou asymptoty hyperboly h'.
3. Sestrojíme přímky p' a q' – osy úhlů přímek k' a ℓ'.
   Osy úhlů asymptot jsou osy hyperboly, tedy přímky p' a q' jsou osy hyperboly h'.
4. Z polohy samodružného bodu $Q = Q'$ hyperboly h je zřejmé, že hlavní osou hyperboly h' je přímka p'.
5. Sestrojíme přímku p – vzor přímky p' v osové afinitě.
6. Sestrojíme body C a D – průsečíky přímky p s hyperbolou h.
7. Sestrojíme body C', D' – obrazy bodů C a D v afinitě.
   Body C' a D' jsou vrcholy hyperboly h'.
8. Hyperbola h' je určena osami p', q', asymptotami k', ℓ' a vrcholy C', D'.

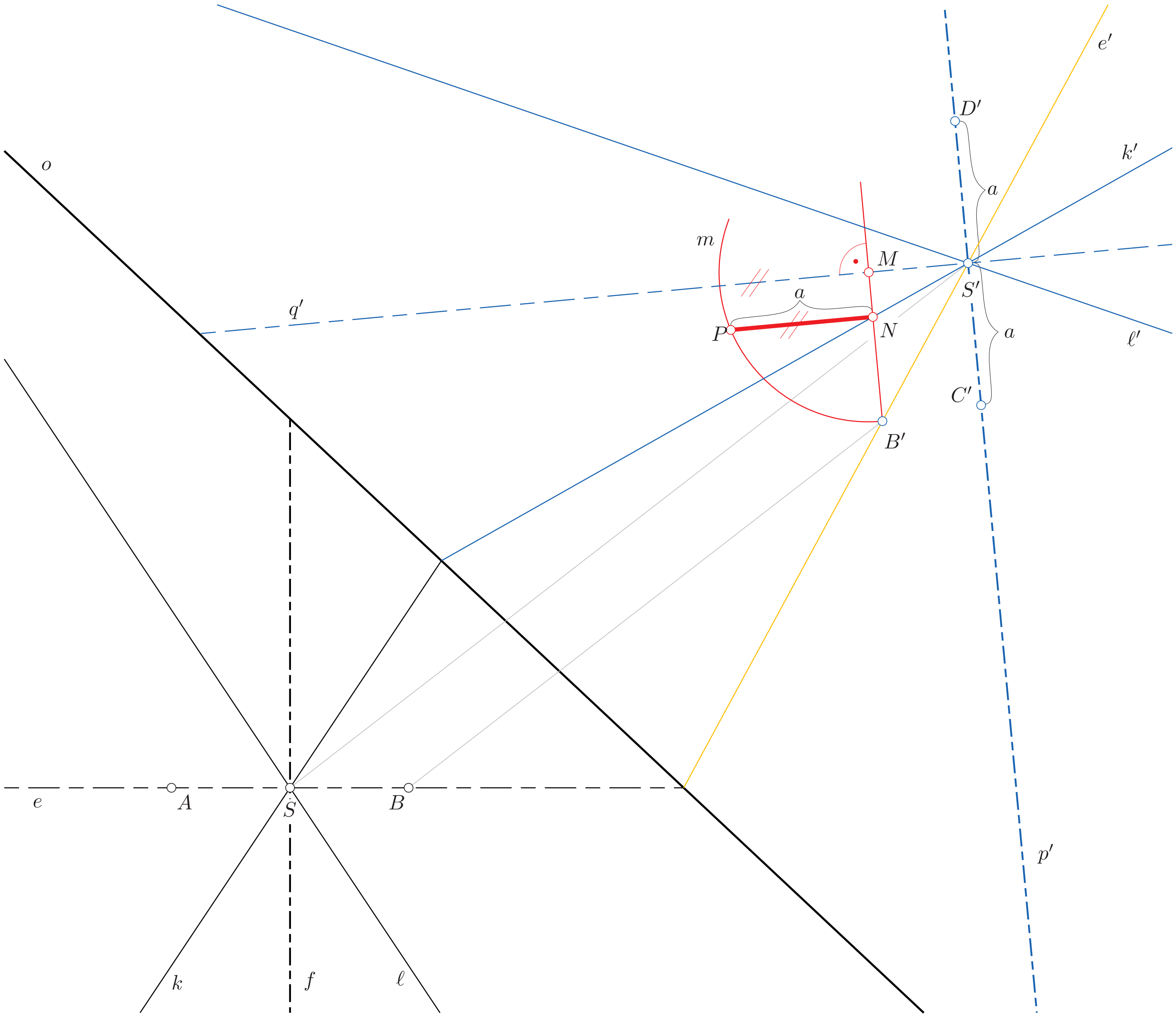


Obraz hyperboly v afinitě

Konstrukce asymptot a vrcholů hyperboly h' bez nutnosti rýsovat hyperbolu h.

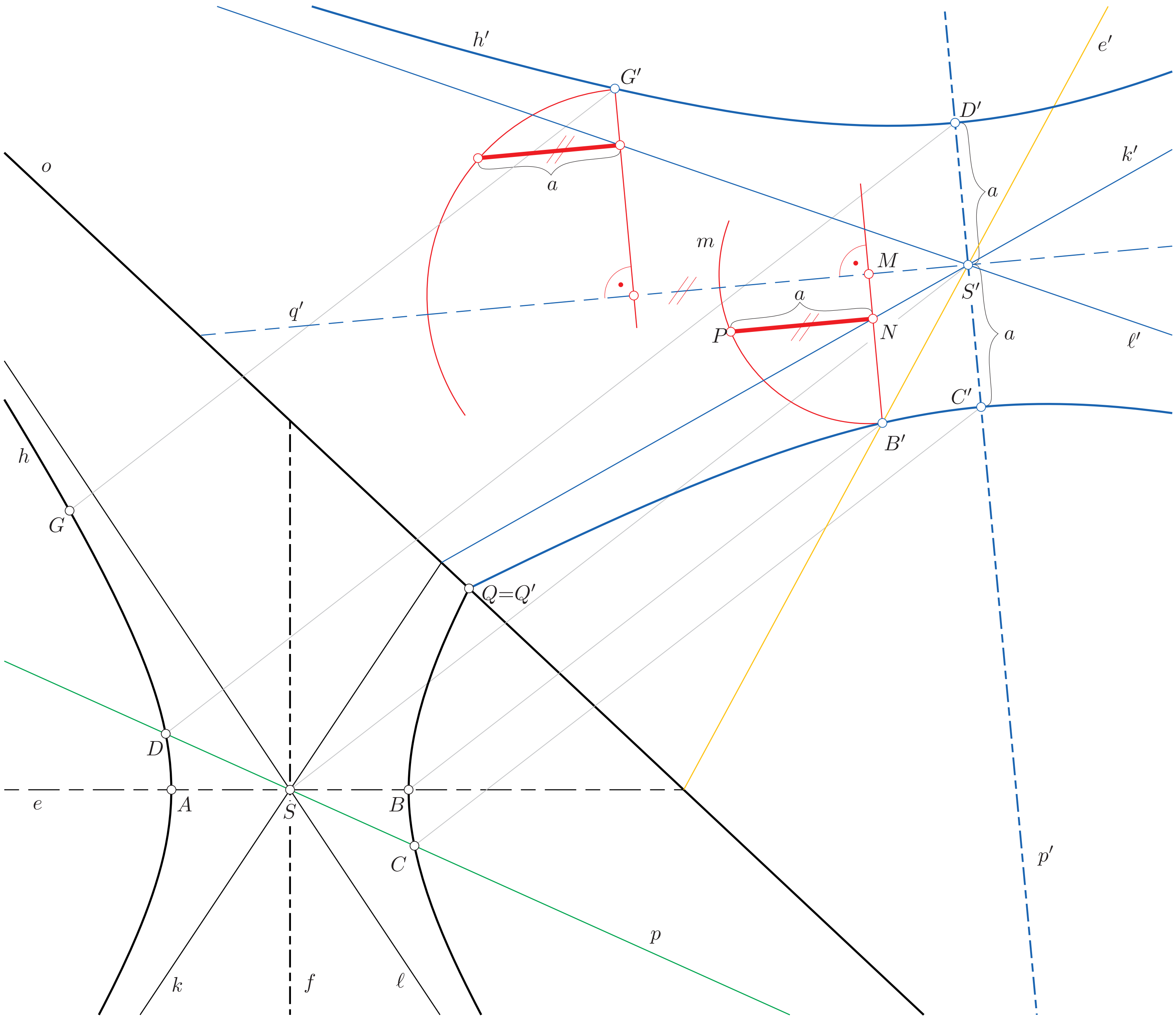
1. Sestrojíme osy e a f, vrcholy A a B a asymptoty k a ℓ hyperboly h.
2. Sestrojíme přímky k' a ℓ' – obrazy přímek k a ℓ v dané afinitě.
   Obrazem asymptot hyperboly jsou asymptoty obrazu hyperboly. Tedy přímky k' a ℓ' jsou asymptoty hyperboly h'.
3. Sestrojíme přímky p' a q' – osy úhlů přímek k' a ℓ'.
   Osy úhlů asymptot jsou osy hyperboly, tedy přímky p' a q' jsou osy hyperboly h'.
4. Sestrojíme obraz libovolného bodu hyperboly h v afinitě – např. bod B'.
5. Z polohy bodu B' je zřejmé, že přímka p' je hlavní osa hyperboly h'.
6. Sestrojíme bod M – patu kolmice spuštěné z bodu B' na vedlejší osu hyperboly h' (přímku q'). Dále sestrojíme bod N – průsečík této kolmice s jednou z asymptot.
7. Sestrojíme kružnici m se středem v bodě M a procházející bodem B'.
8. Dále sestrojíme bod P – průsečík kružnice m s přímkou, která prochází bodem N a je rovnoběžná s vedlejší osou q'.
9. Velikost úsečky PN je rovna velikosti hlavní poloosy hyperboly h'.
   Na hlavní ose p' sestrojíme vrcholy C', D'.
10. Hyperbola h' je určena osami p', q', asymptotami k', ℓ' a vrcholy C', D'.

Poznámka: Pro konstrukci velikosti hlavní poloosy lze použít libovolný bod hyperboly h', nemusí jít o obraz vrcholu hyperboly h – viz konstrukce s bodem G' na následující stránce.

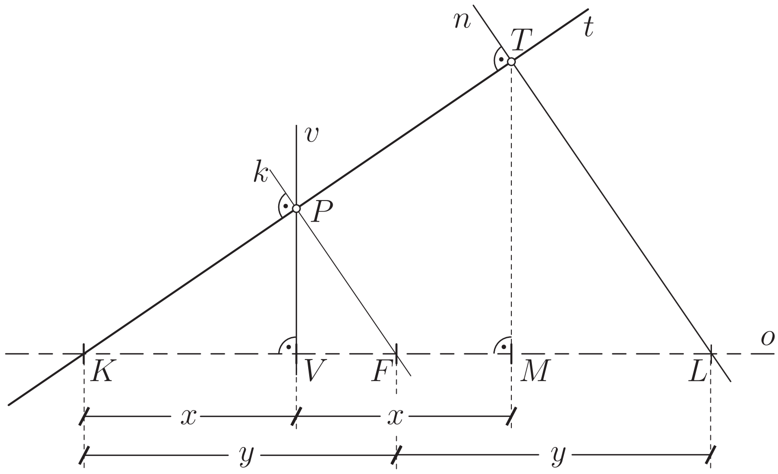


Obraz hyperboly v afinitě

Obě konstrukce v jednom obrázku včetně zobrazené hyperboly h i jejího obrazu v afinitě, hyperboly h'.



Věty o subtangentě a subnormále



o .... osa paraboly
V .... vrchol paraboly
t, T ...... tečna paraboly s bodem dotyku T
n .... normála paraboly v bodě T, tj. kolmice na tečnu t
M .... pravoúhlý průmět bodu T na osu paraboly
v .... vrcholová tečna paraboly
k .... kolmice na tečnu t v bodě P
$K = o \cap t$
$L = o \cap n$
$P = v \cap t$

subtangenta: KM

subnormála: ML

Věta o subtangentě: *Subtangenta* je půlena vrcholem.

$$|KV| = |VM| = x$$

Věta o subnormále: Součet *subtangenty* a *subnormály* je půlen ohniskem.

$$|KF| = |FL| = y$$