

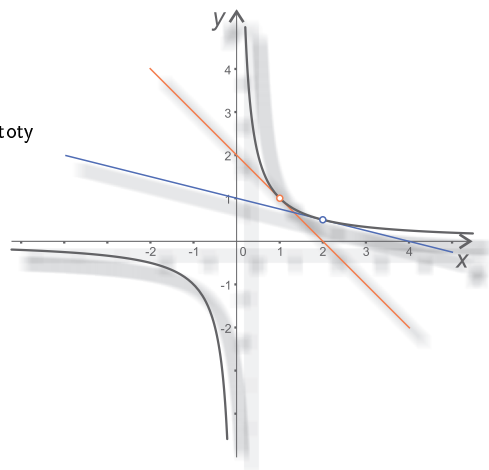
# Matematika I

2. PŘEDNÁŠKA    3. 3. 2017

**1** Graf funkce – vodorovné a svislé asymptoty

- 2** Limity s neurčitými výrazy
- Neurčité výrazy typu „ $\frac{0}{0}$ “
  - Neurčité výrazy typu „ $\frac{0}{\infty}$ “
  - Neurčité výrazy typu „ $\infty - \infty$ “

- 3** Tečna ke grafu funkce
- Upřesnění grafu funkce
  - Směrnice tečny
  - Derivace v bodě



## Asymptoty – příklad 1

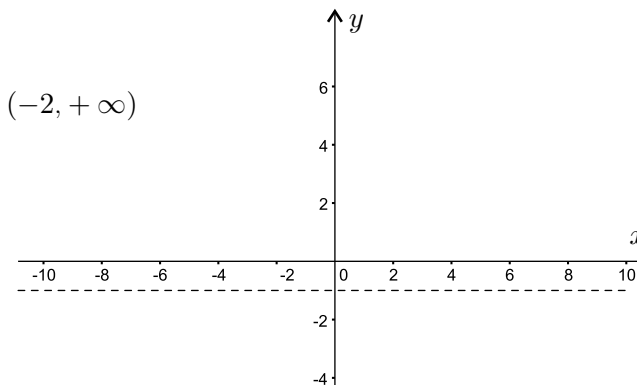
Graf funkce – vodorovné a svislé asymptoty

$$f(x): y = \frac{4-x}{x+2}$$

$$\mathcal{D}_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$



$f(x)$  má u  $+\infty$  i  $-\infty$   
vodorovnou asymptotu:  $y = -1$

## Asymptoty – příklad 1

Graf funkce – vodorovné a svislé asymptoty

$$f(x): y = \frac{4-x}{x+2}$$

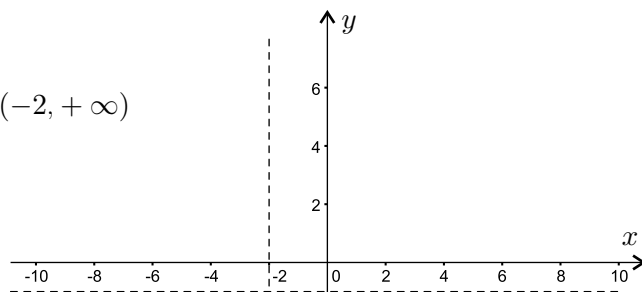
$$\mathcal{D}_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$



$f(x)$  má svislou asymptotu  
 $x = -2$

## Asymptoty – příklad 1

Graf funkce – vodorovné a svislé asymptoty

$$f(x): y = \frac{4-x}{x+2}$$

$$\mathcal{D}_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$$

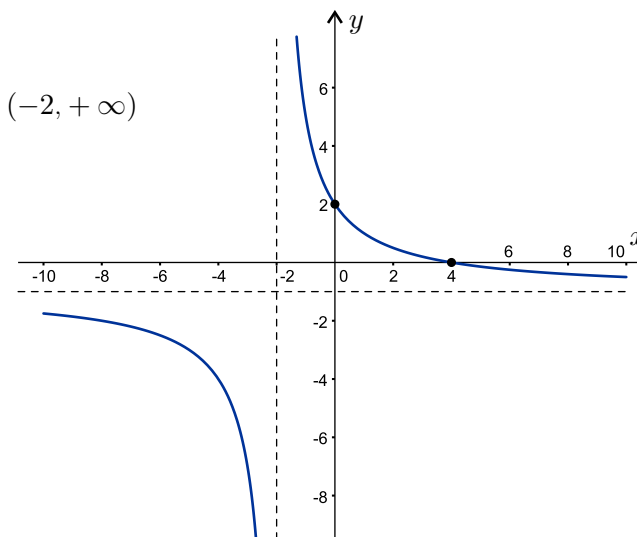
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$$

$$f(0) = 2$$

$$f(4) = 0$$



## Asymptoty – příklad 2

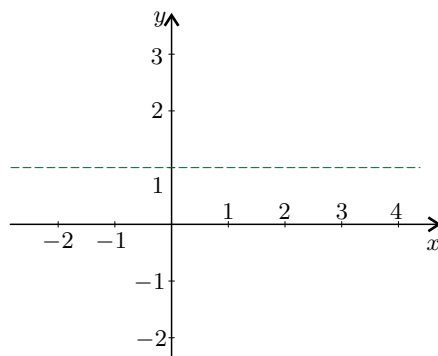
Graf funkce – vodorovné a svislé asymptoty

$$f(x): y = \frac{1}{1 - e^{x-1}}$$

$$\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$



$f(x)$  má vodorovné asymptoty  
 $u -\infty: y = 1$   
 $u +\infty: y = 0$

## Asymptoty – příklad 2

Graf funkce – vodorovné a svislé asymptoty

$$f(x): y = \frac{1}{1 - e^{x-1}}$$

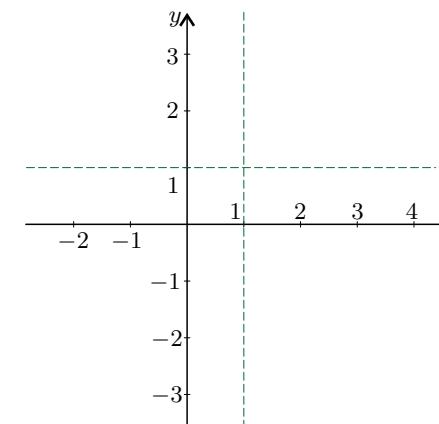
$$\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$



$f(x)$  má svislou asymptotu  $x = 1$

## Asymptoty – příklad 2

Graf funkce – vodorovné a svislé asymptoty

$$f(x): y = \frac{1}{1 - e^{x-1}}$$

$$\mathcal{D}_f = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

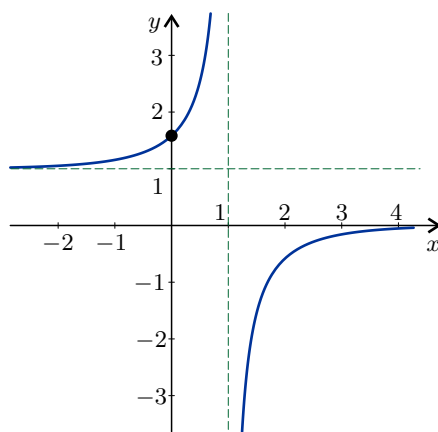
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

$$f(0) = \frac{e}{e-1} \doteq 1,6$$



## Neurčité výrazy

Limity s neurčitými výrazy

$$\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0}$$

Na minulé přednášce jsme odvodili, že o limitě polynomu v nevlastním bodě (tj. u  $+\infty$  nebo  $-\infty$ ) rozhoduje člen s nejvyšším exponentem.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 + x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = „-\infty \cdot (1 + 0)“ = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x} + 1\right) = „-\infty \cdot (-0 + 1)“ = -\infty$$

Neurčité výrazy typu „ $\frac{\infty}{\infty}$ “

Limity s neurčitými výrazy

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

$P(x)$  a  $Q(x)$  jsou polynomy nebo obecnější „mocinné výrazy“

Pro limity „mocinných lomených“ funkcí v nevlastních bodech platí:

- pokud je stupeň čitatele stejný jako stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity podíl koeficientů u nejvyšších mocnin,
- pokud je stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity 0,
- pokud je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity  $+\infty$  nebo  $-\infty$ .

Pod pojmem stupeň rozumíme *nejvyšší mocninu* v čitateli či jmenovateli.

## Racionální lomené funkce

Limity s neurčitými výrazy

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x) \text{ a } Q(x) \text{ jsou polynomy}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{3x + 4 - 5x^2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 1}{2x - x^3} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 3}{x + 5 - x^2}$$

Pro limity racionálních lomených funkcí v nevlastních bodech platí:

- pokud je stupeň čitatele stejný jako stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity podíl koeficientů u nejvyšších mocnin,
- pokud je stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity 0,
- pokud je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity  $+\infty$  nebo  $-\infty$ .

Neurčité výrazy typu „ $\frac{\infty}{\infty}$ “

Limity s neurčitými výrazy

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{x - 2}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 3}}{x - 2}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 + x} - 1}$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4^x}{2 - 3^x}$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 4^x}{2 - 3^x}$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2^{2x}}{2^x - 3^x}$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + 2^{2x}}{2^x - 3^x}$$

Neurčité výrazy typu „ $\frac{0}{0}$ “

Limity s neurčitými výrazy

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x + 2}$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - 2x}{\sqrt{3x} - 3}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - 2\sqrt{2x}}{3x^2 - 4x - 4}$$

Neurčité výrazy typu „ $\infty - \infty$ “

Limity s neurčitými výrazy

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{4x^2 + 3})$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3} - 2x)$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 + 3x + 1})$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + 2x} - 2x)$$

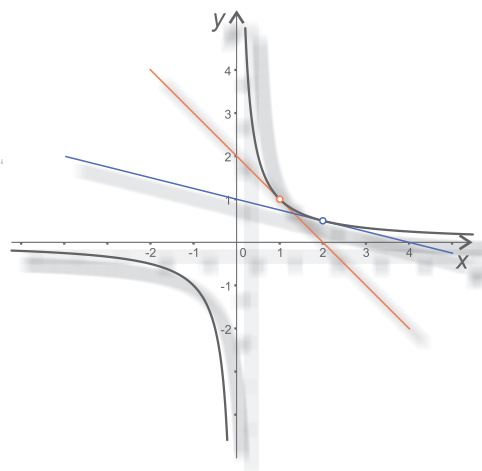
1 Graf funkce – vodorovné a svislé asymptoty

2 Limity s neurčitými výrazy

- Neurčité výrazy typu „ $\frac{\infty}{\infty}$ “
- Neurčité výrazy typu „ $\frac{0}{0}$ “
- Neurčité výrazy typu „ $\infty - \infty$ “

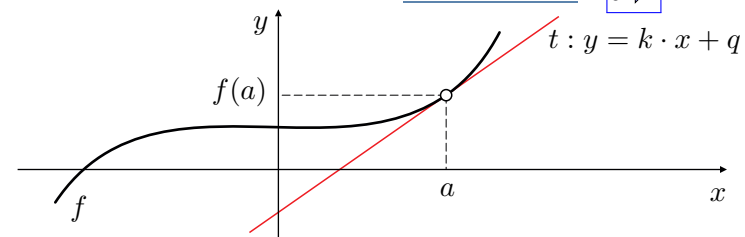
3 Tečna ke grafu funkce

- Upřesnění grafu funkce
- Směrnice tečny
- Derivace v bodě



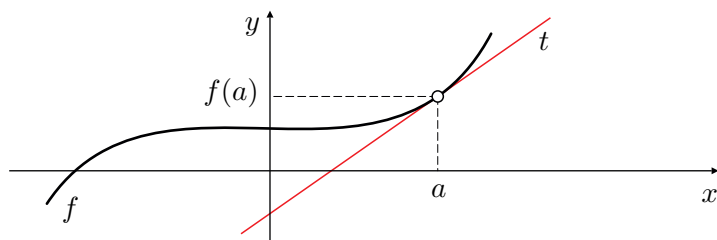
Tečna ke grafu funkce

- Pomocí limit jsme se naučili popisovat graf funkce v krajních bodech definičního oboru.
- V bodech, které patří do definičního oboru funkce můžeme pro popis tvaru grafu funkce použít tečnu ke grafu.



- Pro popis tečny budeme užívat směrnicový tvar rovnice přímky.

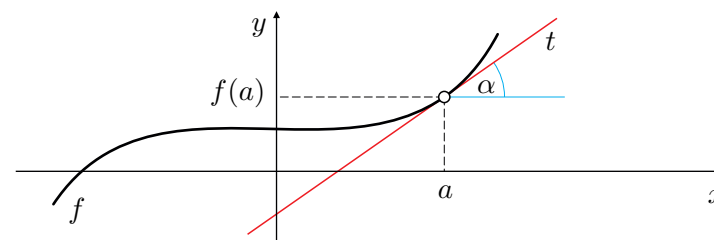
Rovnice tečny



tečna  $t$  :  $y = k \cdot x + q$   
 bod  $[a, f(a)]$  leží na tečně:  $f(a) = k \cdot a + q$   
 vyjádříme  $q$ :  $q = f(a) - k \cdot a$   
 dosadíme  $q$  do rovnice  $t$ :  $y = k \cdot x + f(a) - k \cdot a$

Rovnice tečny  $t$ :  $y - f(a) = k \cdot (x - a)$

Určení směrnice tečny



Směrnice  $k = \text{tg } \alpha$ .

K určení směrnice lze využít limity.

$$k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Pokud  $k$  existuje a není nevlastní, potom je  $k$  směrnice tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[a, f(a)]$ .

## Příklad

Tečna ke grafu funkce

Určete rovnici tečny ke grafu funkce  $f(x) = x^2$  v bodě  $a = -1$ .

$$[a, f(a)] = [-1, 1]$$

$$t : y - f(a) = k \cdot (x - a)$$

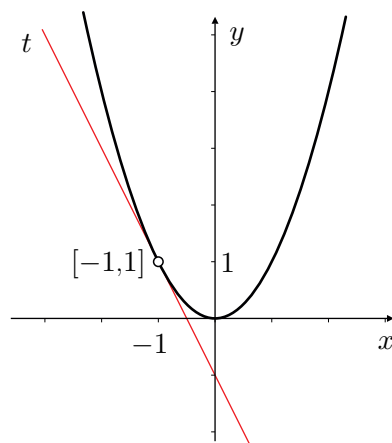
$$t : y - 1 = k \cdot (x + 1)$$

$$k = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$k = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

$$t : y - 1 = -2 \cdot (x + 1)$$

$$t : y = -2x - 1$$



## Derivace v bodě

Tečna ke grafu funkce

Limitu  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  nazýváme *derivace funkce v bodě a* a značíme  $f'(a)$ .

- Pokud tato limita neexistuje, neexistuje derivace.
- Pokud existují jednostranné limity, existují *jednostranné derivace*.
- Pokud je výsledek limity  $+\infty$  nebo  $-\infty$ , je derivace *nevlastní*.
- Pokud je  $f'(a) \in \mathbb{R}$ , je to směrnice tečny ke grafu funkce v bodě  $[a, f(a)]$ .

$$t : y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

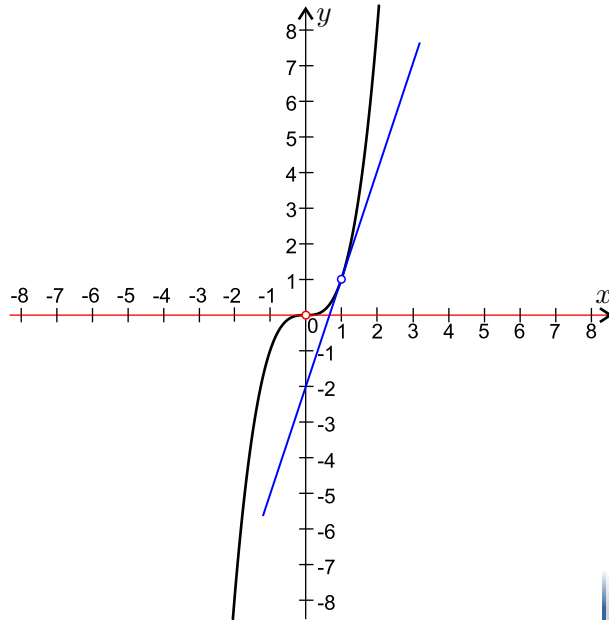
$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

## Příklady

Tečna ke grafu funkce

Určete rovnici tečny ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ .

- 1  $f(x) = x^3$ ,  
 $a = 0, a = 1$
- 2  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  
 $a = 0$
- 3  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ,  
 $a = 0$
- 4  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  
 $a = 1, a = 2$

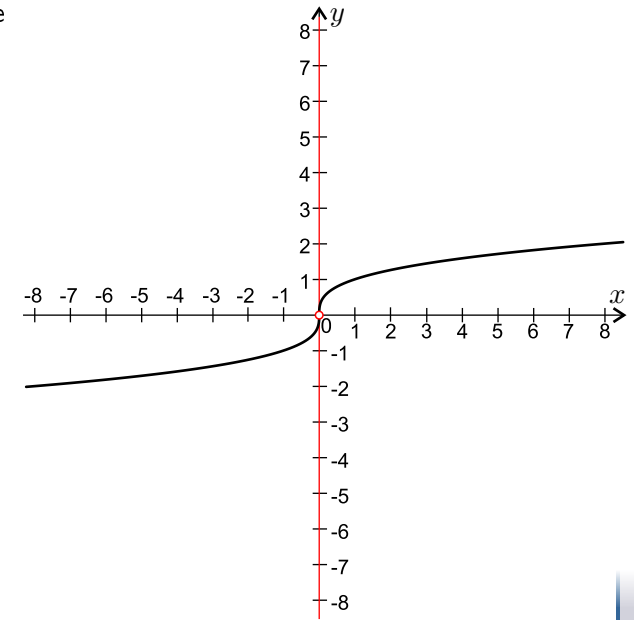


## Příklady

Tečna ke grafu funkce

Určete rovnici tečny ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ .

- 1  $f(x) = x^3$ ,  
 $a = 0, a = 1$
- 2  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  
 $a = 0$
- 3  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ,  
 $a = 0$
- 4  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  
 $a = 1, a = 2$

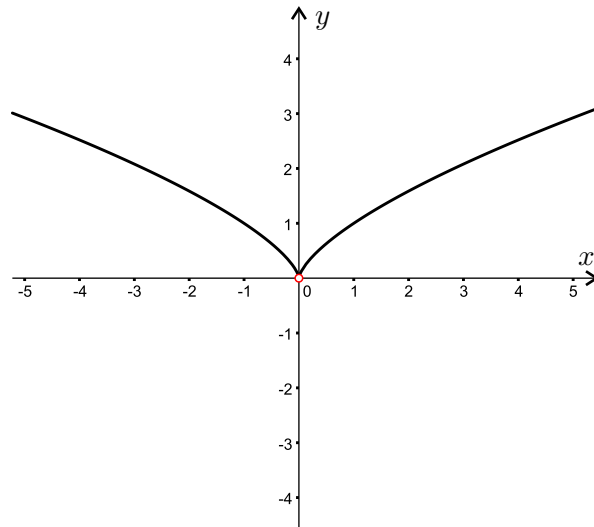


## Příklady

Tečna ke grafu funkce

Určete rovnici tečny ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ .

- 1  $f(x) = x^3$ ,  
 $a = 0, a = 1$
- 2  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  
 $a = 0$
- 3  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ,  
 $a = 0$
- 4  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  
 $a = 1, a = 2$



## Příklady

Tečna ke grafu funkce

Určete rovnici tečny ke grafu funkce  $f(x)$  v bodě  $a$ .

- 1  $f(x) = x^3$ ,  
 $a = 0, a = 1$
- 2  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  
 $a = 0$
- 3  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ ,  
 $a = 0$
- 4  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  
 $a = 1, a = 2$

