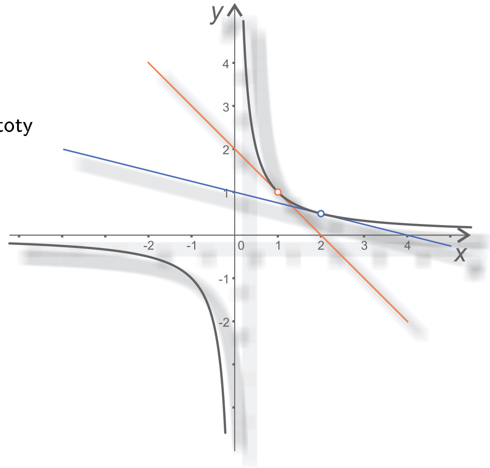
Matematika I

2. PŘEDNÁŠKA 2. 3. 2018



1. Graf funkce – vodorovné a svislé asymptoty
2. Limity s neurčitými výrazy
   - Neurčité výrazy typu „$\frac{\infty}{\infty}$“
   - Neurčité výrazy typu „$\frac{0}{0}$“
   - Neurčité výrazy typu „$\infty - \infty$“
3. Tečna ke grafu funkce
   - Upřesnění grafu funkce
   - Směrnice tečny
   - Derivace v bodě

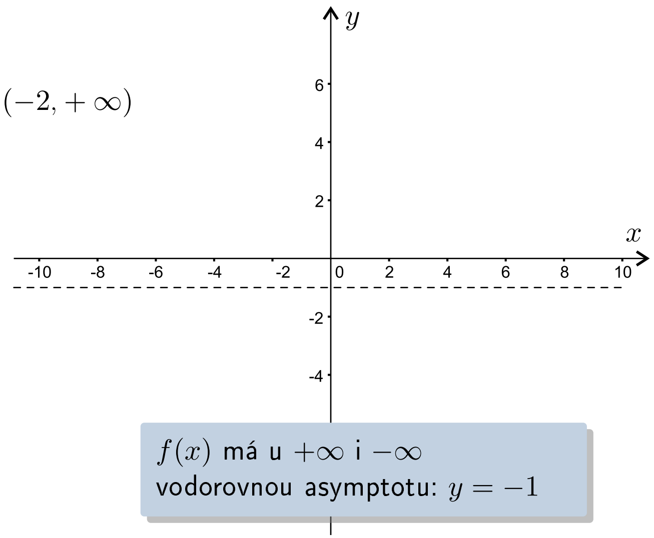
Asymptoty – příklad 1

$f(x)\colon\ y = \dfrac{4-x}{x+2}$

$\mathcal{D}_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$



$f(x)$ má u $+\infty$ i $-\infty$
vodorovnou asymptotu: $y = -1$

Asymptoty – příklad 1

$f(x)\colon\ y = \dfrac{4-x}{x+2}$

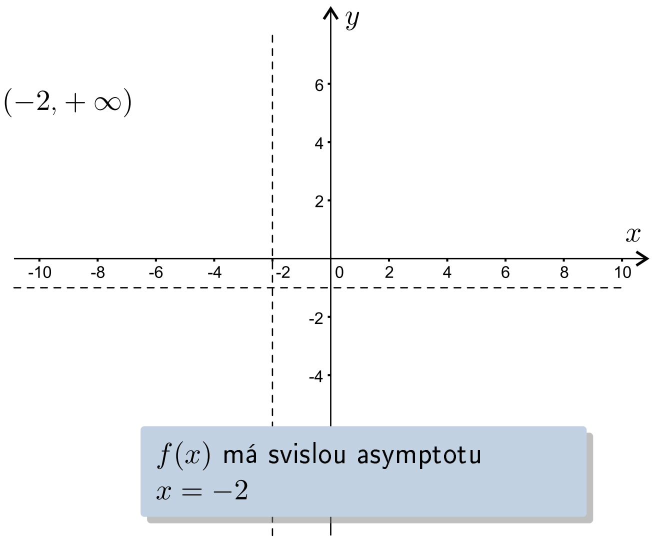
$\mathcal{D}_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$



$f(x)$ má svislou asymptotu
$x = -2$

Asymptoty – příklad 1

$f(x)\colon\ y = \dfrac{4-x}{x+2}$

$\mathcal{D}_f = (-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

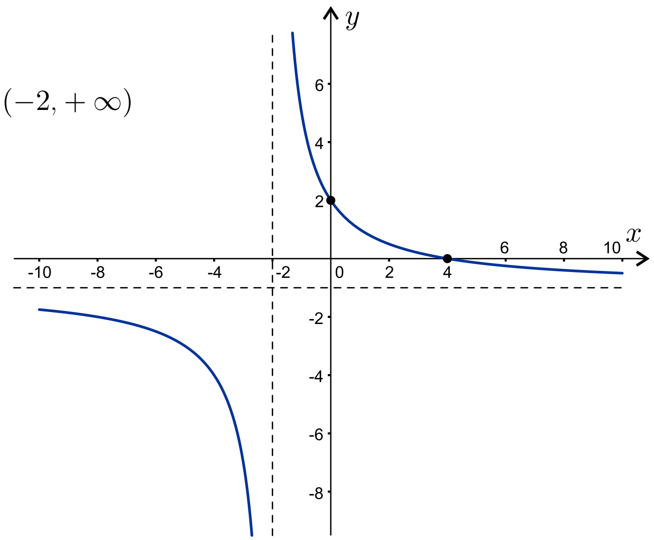
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = +\infty$

$f(0) = 2$

$f(4) = 0$



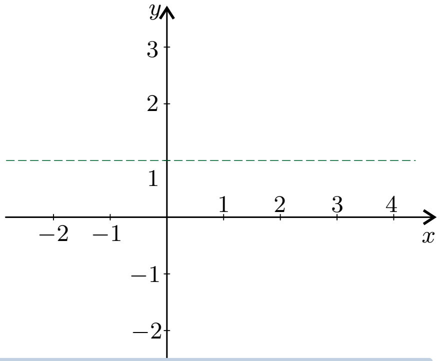
Asymptoty – příklad 2

$f(x)\colon\ y = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{x-1}}$

$\mathcal{D}_f = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$



$f(x)$ má vodorovné asymptoty
u $-\infty$: $y = 1$
u $+\infty$: $y = 0$

Asymptoty – příklad 2

$f(x)\colon\ y = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{x-1}}$

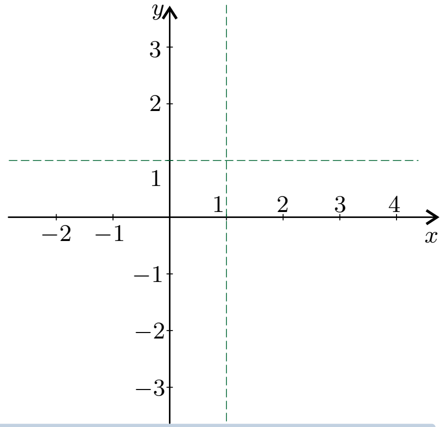
$\mathcal{D}_f = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$



$f(x)$ má svislou asymptotu $x = 1$

Asymptoty – příklad 2

$f(x)\colon\ y = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{x-1}}$

$\mathcal{D}_f = (-\infty,1) \cup (1,+\infty)$

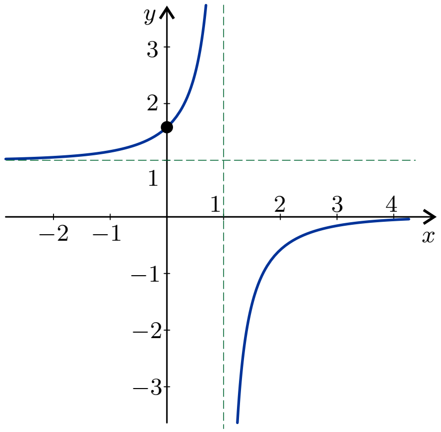
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = -\infty$

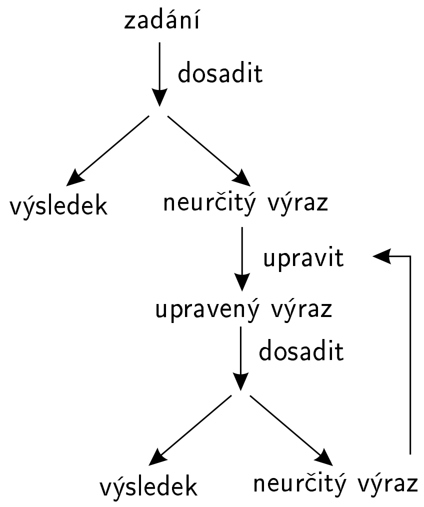
$f(0) = \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \doteq 1{,}6$



Neurčité výrazy

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \frac{0}{0}$$

- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x - 2x^2 - 2}{(x-2)^3}$
- $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4 - x^2}{\sqrt{2x} - 2}$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln(x+1) - \ln(x))$



Polynomy

$$\lim_{x\to -\infty} (x^3 + x^2) = \lim_{x\to -\infty} x^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right) = „-\infty \cdot (1+0)“ = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} (x - x^2) = \lim_{x\to +\infty} -x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x} + 1\right) = „-\infty \cdot (-0+1)“ = -\infty$$

O limitě polynomu *v nevlastním bodě* (tj. u $+\infty$ nebo $-\infty$) rozhoduje člen s nejvyšším exponentem.

Racionální lomené funkce

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x) \text{ a } Q(x) \text{ jsou polynomy}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 + 5x - 1}{3x + 4 - 5x^2} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2 + 1}{2x - x^3} \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3 - 3}{x + 5 - x^2}$$

Pro limity racionálních lomených funkcí v <u>nevlastních bodech</u> platí:

- pokud je stupeň čitatele stejný jako stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity podíl koeficientů u nejvyšších mocnin,
- pokud je stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity 0,
- pokud je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity $+\infty$ nebo $-\infty$.

Racionální lomené funkce – příklady

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x^3 + 5x^2 + 5}{(x^2 + 2x + 1)(3x - 1)}$ | $\frac{2}{3}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5 - 3x - 4x^2}{2x + 2}$ | $-\infty$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x - x^3 + 1}{x^2 + 2x}$ | $+\infty$
4. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x + 2}{4x^3 + 1}$ | 0
5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2 + 1}{(x+1)(1 - x^2)}$ | 0
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{(2x - 1)(x^2 + 2x + 1)}{3x^2 - 4x^3 + 2x + 1}$ | $-\frac{1}{2}$

Neurčité výrazy typu „$\frac{\infty}{\infty}$“

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

$P(x)$ a $Q(x)$ jsou polynomy nebo obecnější „mocninné výrazy“

Pro limity „mocninných lomených“ funkcí v nevlastních bodech platí:

- pokud je stupeň čitatele stejný jako stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity podíl koeficientů u nejvyšších mocnin,
- pokud je stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity 0,
- pokud je stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, pak je výsledkem limity $+\infty$ nebo $-\infty$.

Pod pojmem stupeň rozumíme *nejvyšší mocninu* v čitateli či jmenovateli.

Neurčité výrazy typu „$\frac{\infty}{\infty}$“

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{x-2}$ | $\sqrt{2}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{x-2}$ | $-\sqrt{2}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+x-1}}$ | 0
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2x-1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ | $+\infty$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+4^x}{2-3^x}$ | $-\infty$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+4^x}{2-3^x}$ | $\frac{1}{2}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+2^{2x}}{2^x-3^x}$ | $-\infty$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+2^{2x}}{2^x-3^x}$ | $+\infty$

Neurčité výrazy typu „$\frac{0}{0}$“

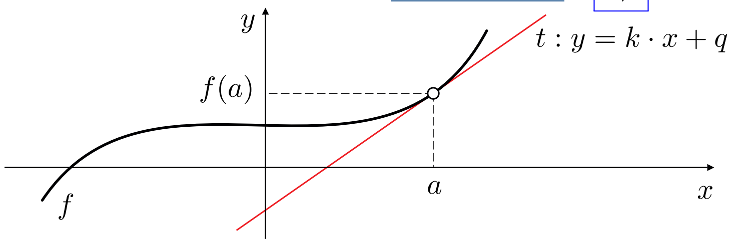
1. $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{3x^2+5x-2}{x+2}$ | -7
2. $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{6-2x}{\sqrt{3x}-3}$ | -4
3. $\lim\limits_{x\to2} \dfrac{4-2\sqrt{2x}}{3x^2-4x-4}$ | $\frac{1}{8}$

Neurčité výrazy typu „$\infty-\infty$“

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{4x^2+3}\right)$ | $-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+3}-2x\right)$ | 0
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x-\sqrt{x^2+3x+1}\right)$ | $-\infty$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{9x^2+2x}-2x\right)$ | $+\infty$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$ | $-\frac{\pi}{2}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2+1}-2x\right)$ | $\frac{\pi}{2}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arccotg}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ | $\frac{\pi}{2}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arccotg}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ | 0

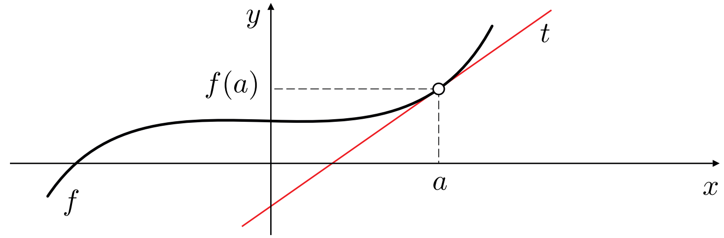
Tečna ke grafu funkce

- Pomocí limit jsme se naučili popisovat graf funkce v krajních bodech definičního oboru.
- V bodech, které **patří do definičního oboru funkce** můžeme pro popis tvaru grafu funkce použít tečnu ke grafu.



- Pro popis tečny budeme užívat směrnicový tvar rovnice přímky.

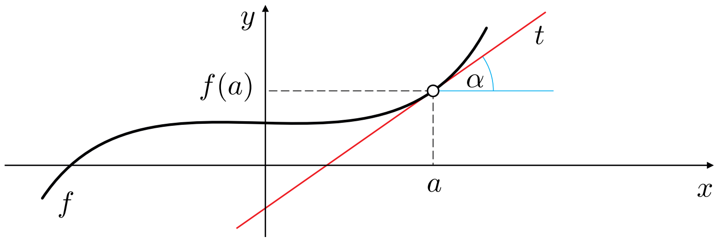
Rovnice tečny



tečna t :	y	$=$	$k \cdot x + q$
bod $[a\ ,\ f(a)]$ leží na tečně:	$f(a)$	$=$	$k \cdot a + q$
vyjádříme q:	q	$=$	$f(a) - k\ \cdot a$
dosadíme q do rovnice t:	y	$=$	$k \cdot x + f(a) - k \cdot a$

Rovnice tečny t: $y - f(a) = k \cdot (x - a)$

Určení směrnice tečny



Směrnice $k = \operatorname{tg} \alpha$.
K určení směrnice lze využít limity.

$$k = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Pokud k existuje a není nevlastní, potom je k směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Příklad

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x) = x^2$ v bodě $a = -1$.

$[a,f(a)] = [-1,1]$

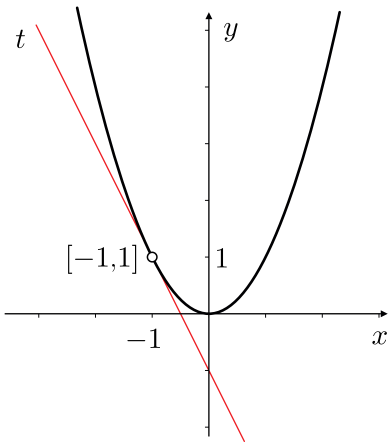
$t : y - f(a) = k \cdot (x - a)$
$t : y - 1 = k \cdot (x + 1)$

$$k = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$k = \lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$$

$t : y - 1 = -2 \cdot (x + 1)$

$t : y = -2x - 1$



Derivace v bodě

Limitu $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)}$ nazýváme *derivace funkce v bodě* a a značíme $f'(a)$.

- Pokud tato limita neexistuje, neexistuje derivace.
- Pokud existují jednostranné limity, existují *jednostranné derivace*.
- Pokud je výsledek limity $+\infty$ nebo $-\infty$, je derivace *nevlastní*.
- Pokud je $f'(a) \in \mathbb{R}$, je to směrnice tečny ke grafu funkce v bodě $[a,f(a)]$.

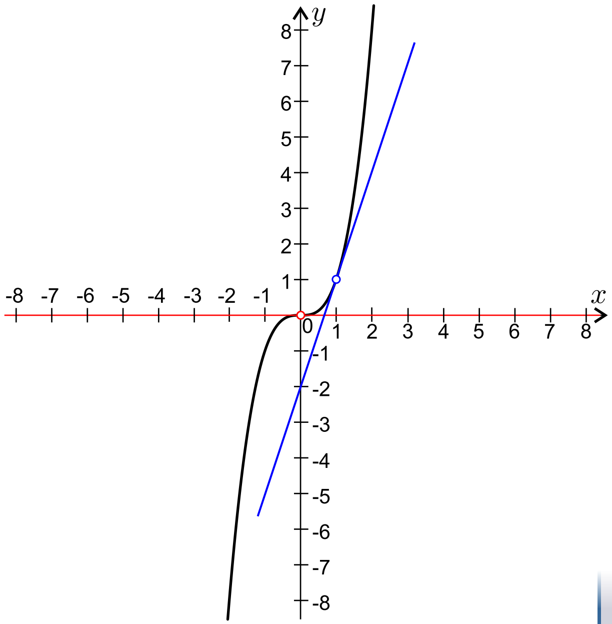
$$t : y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)}$$

Příklady

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a.

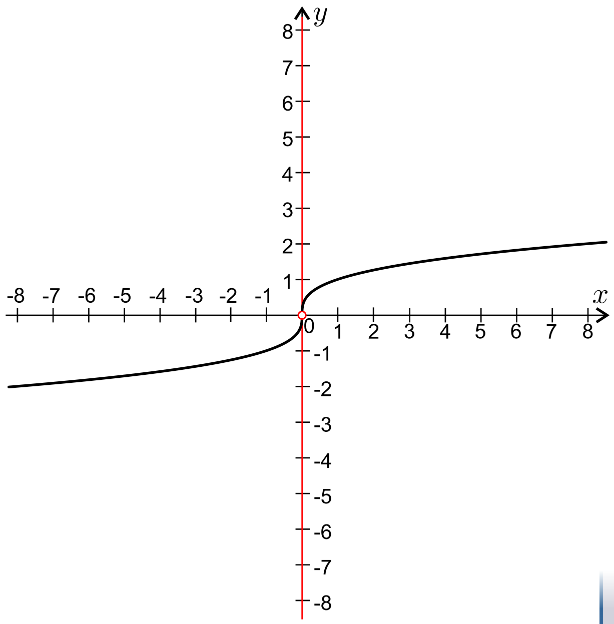
1. $f(x) = x^3$,
   $a_1 = 0,\ a_2 = 1$
   $t_1\colon y = 0$,
   $t_2\colon y = 3x - 2$



Příklady

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a.

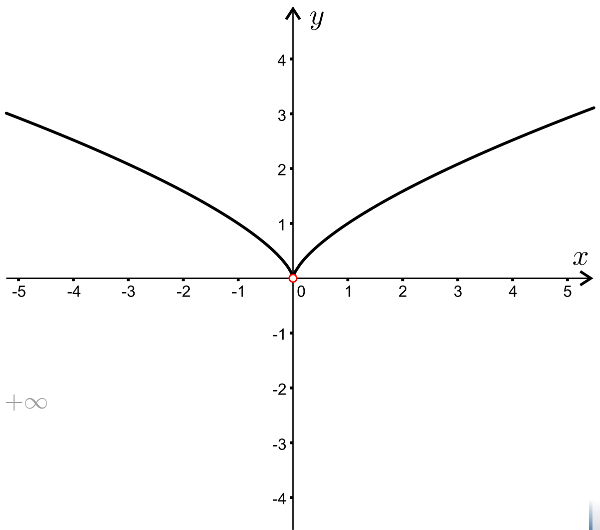
1. $f(x) = x^3$,
   $a_1 = 0,\ a_2 = 1$
   $t_1\colon y = 0$,
   $t_2\colon y = 3x - 2$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$,
   $a = 0$
   $f'(0) = +\infty$



Příklady

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a.

1. $f(x) = x^3$,
   $a_1 = 0,\ a_2 = 1$
   $t_1\colon y = 0$,
   $t_2\colon y = 3x - 2$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$,
   $a = 0$
   $f'(0) = +\infty$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$,
   $a = 0$
   $f'_-(0) = -\infty,\ f'_+(0) = +\infty$



Příklady

Určete rovnici tečny ke grafu funkce $f(x)$ v bodě a.

1. $f(x) = x^3$,
   $a_1 = 0,\ a_2 = 1$
   $t_1\colon y = 0$,
   $t_2\colon y = 3x - 2$
2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$,
   $a = 0$
   $f'(0) = +\infty$
3. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$,
   $a = 0$
   $f'_-(0) = -\infty,\ f'_+(0) = +\infty$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x}$,
   $a_1 = 1,\ a_2 = 2$
   $t_1\colon y = -x + 2,\ t_2\colon y = -\frac{1}{4}x + 1$