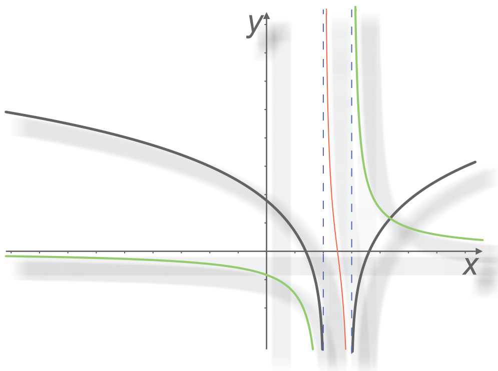
Matematika I

3. PŘEDNÁŠKA 10. 3. 2017



Derivace v bodě

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)}$$

$f'(a)$ je *derivace funkce f v bodě a*

- Pokud tato limita neexistuje, neexistuje derivace.
- Pokud existují jednostranné limity, existují *jednostranné derivace*.
- Pokud je výsledek limity $+\infty$ nebo $-\infty$, je derivace *nevlastní*.
- Pokud je $f'(a) \in \mathbb{R}$, je to směrnice tečny ke grafu funkce v bodě $[a, f(a)]$.

$$t: \quad y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$$

Derivace funkce – příklady

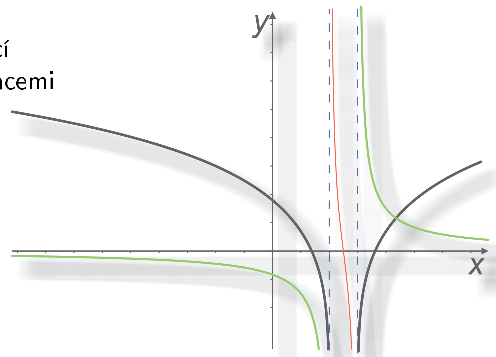
Pro základní funkce lze odvodit obecná pravidla pro počítání derivací v bodě.

- $f(x) = k\cdot x$, $(k \in \mathbb{R})$
  $$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{kx-ka}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{k\cdot\cancel{(x-a)}}{\cancel{x-a}} = k$$
- $f(x) = x^2$
  $$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x+a)}{\cancel{x-a}} = 2a$$
- $f(x) = x^3$
  $$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{x^3-a^3}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}(x^2+xa+a^2)}{\cancel{x-a}} =$$
  $$= a^2+a^2+a^2 = 3a^2$$

Derivace funkce

Funkce f:	$x \in \mathcal{D}_f$	$\xrightarrow{f}$	$f(x)$
Derivace v bodě:	$a \in \mathcal{D}_f$	$\xrightarrow{\text{limita}}$	$f'(a)$
Funkce f':	$x \in \mathcal{D}_{f'}$	$\xrightarrow{f'}$	$f'(x)$

- Funkci f' nazýváme *derivace funkce f*.
- $\mathcal{D}_{f'} = \{x \in \mathcal{D}_f\,;\ f'(x) \text{ existuje a } f'(x) \in \mathbb{R}\}$
- Vždy platí:
  $$\mathcal{D}_{f'} \subseteq \mathcal{D}_f$$
- Z definičního oboru f vynecháme body, kde f' neexistuje nebo je nevlastní.



Tabulka derivací

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'} \subseteq \mathcal{D}_f$
$k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^a,\ a \in \mathbb{R}$	záleží na a	$a \cdot x^{a-1}$	záleží na a
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$
$\operatorname{cotg} x$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi\,;\,\pi+k\pi)$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi\,;\,\pi+k\pi)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$(0,+\infty)$	$\frac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
a^x $a\in(0,1)\cup(1,\infty)$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$

Tabulka derivací

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'} \subseteq \mathcal{D}_f$
$k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^a,\ a \in \mathbb{R}$	záleží na a	$a \cdot x^{a-1}$	záleží na a
a^x $a\in(0,1)\cup(1,\infty)$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$

$$f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R}$$

např.

$a \in \mathbb{N}$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{Z}^-$	$\mathcal{D}_f = (-\infty\,;\,0) \cup (0\,;\,+\infty)$
$a = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, n je sudé	$\mathcal{D}_f = \langle 0\,;\,+\infty)$
$a = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, n je liché	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Derivace součtu, rozdílu, násobku

- $f(x) = u(x) + v(x)$ $\quad f'(x) = (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$
- $g(x) = u(x) - v(x)$ $\quad g'(x) = (u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$
- $h(x) = k \cdot u(x),\ k \in \mathbb{R}$ $\quad h'(x) = (k \cdot u(x))' = k \cdot u'(x)$

$$\begin{aligned} (u+v)' &= u' + v' \\ (u-v)' &= u' - v' \\ (k \cdot u)' &= k \cdot u' \end{aligned}$$

Příklady:

- $f(x) = \ln x + x$
- $g(x) = 2^x - \dfrac{1}{x}$
- $h(x) = 5 \cdot \operatorname{tg} x$

Derivace součinu, podílu

- $f(x) = u(x) \cdot v(x)$

  $f'(x) = (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

- $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)},\ v(x) \neq 0$

  $$g'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

Příklady:

- $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^x$
- $g(x) = \dfrac{x^3}{2(x-1)}$
- $h(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

Derivace složené funkce

$f(x) = v(u(x))$ $\quad$ v – vnější funkce
u – vnitřní funkce

$$f'(x) = (v(u(x)))' = v'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$(v(u))' = v'(u) \cdot u'$$

Příklady:

- $f(x) = (x-1)^2$
- $g(x) = (\ln x)^2$
- $h(x) = \ln(x^2)$

Funkce $\arcsin x$

Cyklometrické funkce

$$f(x): \ y = \sin x$$

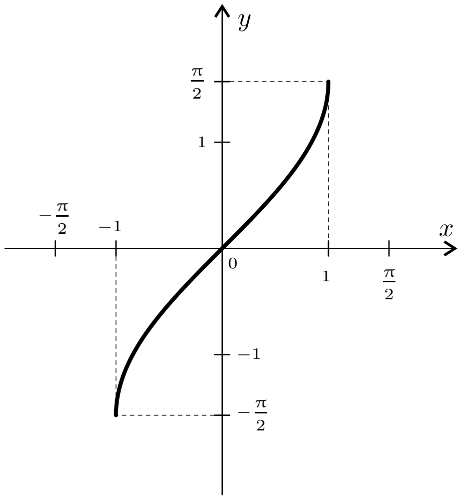
$x \in \left\langle -\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$

$y \in \langle -1 \,;\, 1 \rangle$

$$f^{-1}(x): \ y = \arcsin x$$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \langle -1 \,;\, 1 \rangle$

$\mathcal{H}_{f^{-1}} = \left\langle -\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2} \right\rangle$



Funkce $\arccos x$

Cyklometrické funkce

$$f(x): y = \cos x$$

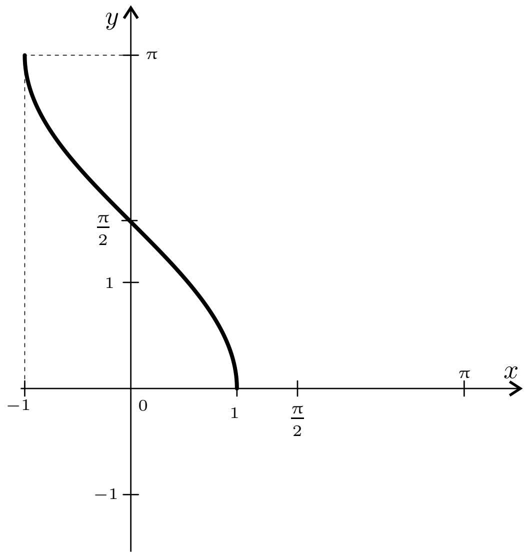
$x \in \langle 0 \,;\, \pi \rangle$

$y \in \langle -1 \,;\, 1 \rangle$

$$f^{-1}(x): y = \arccos x$$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \langle -1 \,;\, 1 \rangle$

$\mathcal{H}_{f^{-1}} = \langle 0 \,;\, \pi \rangle$



Funkce $\operatorname{arctg} x$

Cyklometrické funkce

$$f(x): y = \operatorname{tg} x$$

Funkce $\operatorname{tg} x$ je rostoucí na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2} \right)$.

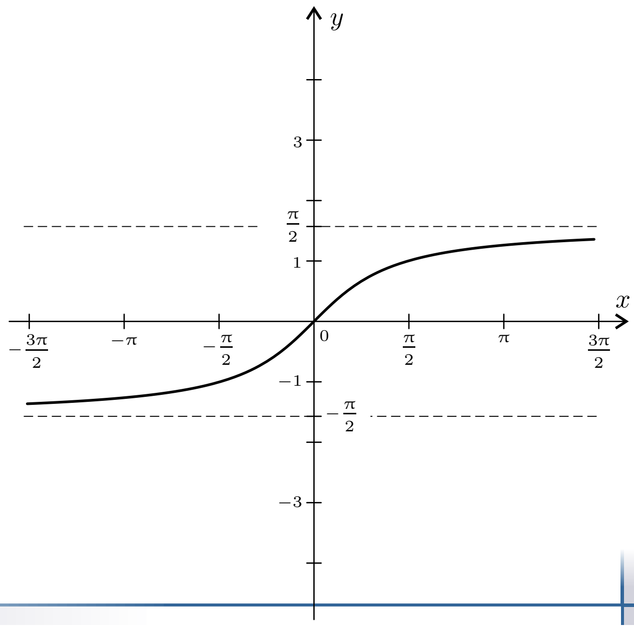
$x \in \left(-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2} \right)$

$y \in \mathbb{R}$

$f^{-1}: y = \operatorname{arctg} x$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

$\mathcal{H}_{f^{-1}} = \left(-\frac{\pi}{2} \,;\, \frac{\pi}{2} \right)$



Funkce $\operatorname{arccotg} x$

Cyklometrické funkce

$f(x): y = \operatorname{cotg} x$

Funkce $\operatorname{cotg} x$ je klesající na intervalu $(0 \,;\, \pi)$.

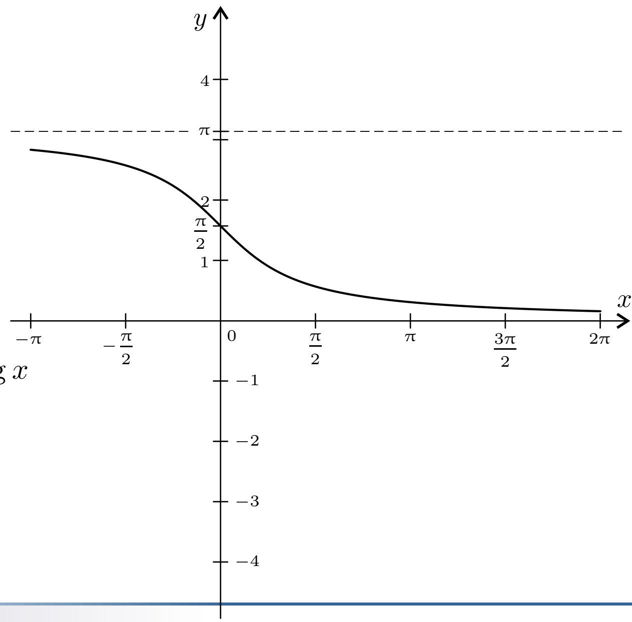
$x \in (0 \,;\, \pi)$

$y \in \mathbb{R}$

$f^{-1}: y = \operatorname{arccotg} x$

$\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$

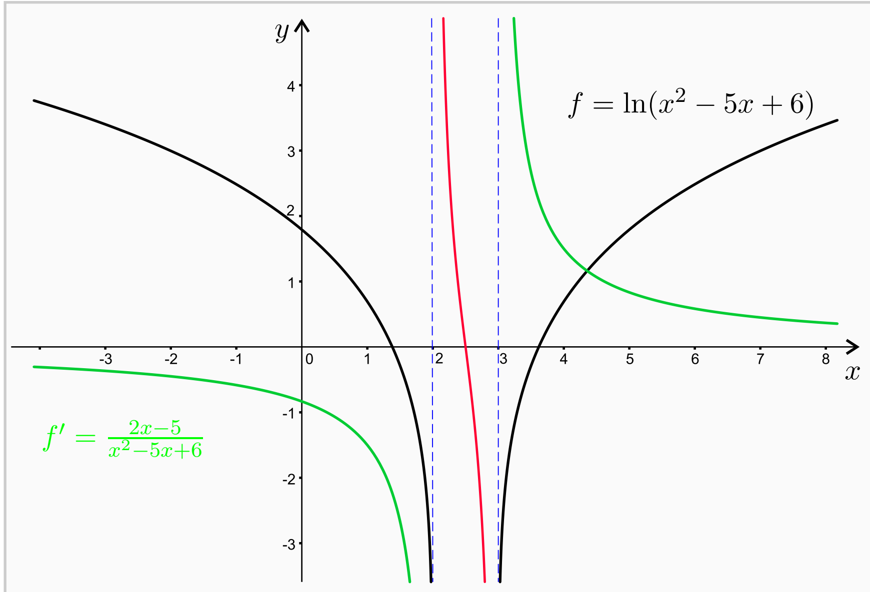
$\mathcal{H}_{f^{-1}} = (0 \,;\, \pi)$



Příklady

1. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$
2. $f(x) = \sin(\sqrt{x})$
3. $f(x) = \sqrt{\sin x}$
4. $f(x) = \ln(\operatorname{cotg} x)$
5. $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
7. $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x}$
8. $f(x) = \cos\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)$
9. $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$
10. $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{2}{x}}$

Příklady



Příklady – výsledky

1. $\mathcal{D}_f = (-\infty\,;2) \cup (3\,;+\infty)$, $f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
2. $\mathcal{D}_f = \langle 0\,;+\infty)$, $f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, $\mathcal{D}_{f'} = (0\,;+\infty)$
3. $\mathcal{D}_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2k\pi\,;\pi + 2k\pi\rangle$, $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, $\mathcal{D}_{f'} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi\,;\pi + 2k\pi)$
4. $\mathcal{D}_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(k\pi\,;\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $f'(x) = \frac{-1}{\sin x \cos x}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
5. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x}}$, $\mathcal{D}_{f'} = (-\infty\,;0) \cup (0\,;+\infty)$
6. $\mathcal{D}_f = (-\infty\,;-1) \cup (1\,;+\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x^4-1}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
7. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = (3x^2 - x^3) \cdot \mathrm{e}^{-x}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
8. $\mathcal{D}_f = \langle 0\,;+\infty)$, $f'(x) = \frac{-\sin\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $\mathcal{D}_{f'} = (0\,;+\infty)$
9. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{x^2 \cos x^3}{\sqrt[3]{(\sin x^3)^2}}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\sqrt[3]{k\pi}\right\}$
10. $\mathcal{D}_f = (0\,;2\rangle$, $f'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{\ln\frac{2}{x}}}$, $\mathcal{D}_{f'} = (0\,;2)$