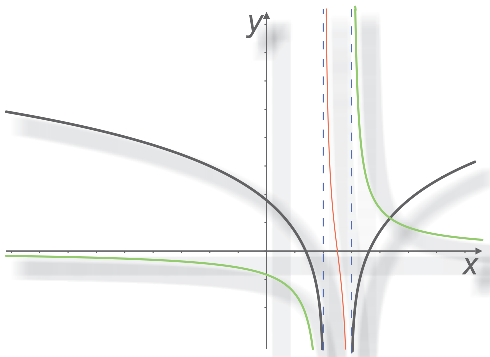
Matematika I

3. PŘEDNÁŠKA 2. 3. 2018



Derivace v bodě

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{(x - a)}$$

$f'(a)$ je *derivace funkce f v bodě a*

- Pokud tato limita neexistuje, neexistuje derivace.
- Pokud existují jednostranné limity, existují *jednostranné derivace*.
- Pokud je výsledek limity $+\infty$ nebo $-\infty$, je derivace *nevlastní*.
- Pokud je $f'(a) \in \mathbb{R}$, je to směrnice tečny ke grafu funkce v bodě $[a, f(a)]$.

$$t: \quad y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Derivace funkce – příklady

Pro základní funkce lze odvodit obecná pravidla pro počítání derivací v bodě.

- $f(x) = k \cdot x$, $(k \in \mathbb{R})$
  $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{kx - ka}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{k \cdot \cancel{(x - a)}}{\cancel{x - a}} = k$$
- $f(x) = x^2$
  $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x - a)}(x + a)}{\cancel{x - a}} = 2a$$
- $f(x) = x^3$
  $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x - a)}(x^2 + xa + a^2)}{\cancel{x - a}} =$$
  $$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

Derivace funkce

Funkce f:	$x \in \mathcal{D}_f$	$\xrightarrow{f}$	$f(x)$
Derivace v bodě:	$a \in \mathcal{D}_f$	$\xrightarrow{\text{limita}}$	$f'(a)$
Funkce f':	$x \in \mathcal{D}_{f'}$	$\xrightarrow{f'}$	$f'(x)$

- Funkci f' nazýváme *derivace funkce f*.
- $\mathcal{D}_{f'} = \{x \in \mathcal{D}_f \;;\; f'(x) \text{ existuje a } f'(x) \in \mathbb{R}\}$
- Vždy platí:

$$\mathcal{D}_{f'} \subseteq \mathcal{D}_f$$

- Z definičního oboru f vynecháme body, kde f' neexistuje nebo je nevlastní.

Tabulka derivací 1/2

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'} \subseteq \mathcal{D}_f$
$k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^a,\ a \in \mathbb{R}$	záleží na a	$a \cdot x^{a-1}$	záleží na a
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\,;\,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$
$\operatorname{cotg} x$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi\,;\,\pi+k\pi)$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi\,;\,\pi+k\pi)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$\ln x$	$(0,+\infty)$	$\dfrac{1}{x}$	$(0,+\infty)$
a^x, $a\in(0,1)\cup(1,\infty)$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$

Tabulka derivací 2/2

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'} \subseteq \mathcal{D}_f$
$\arcsin x$	$\langle -1,1\rangle$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$ $f'_+(-1) = f'_-(1) = +\infty$
$\arccos x$	$\langle -1,1\rangle$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1,1)$ $f'_+(-1) = f'_-(1) = -\infty$
$\operatorname{arctg} x$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arccotg} x$	$\mathbb{R}$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$

Tabulka derivací 1/2

$f(x)$	$\mathcal{D}_f$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'} \subseteq \mathcal{D}_f$
$k,\ k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
$x^a,\ a \in \mathbb{R}$	záleží na a	$a \cdot x^{a-1}$	záleží na a
a^x, $a\in(0,1)\cup(1,\infty)$	$\mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$\mathbb{R}$

$$f(x) = x^a,\ a \in \mathbb{R}$$

např.

$a \in \mathbb{N}$	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
$a \in \mathbb{Z}^-$	$\mathcal{D}_f = (-\infty\,;\,0) \cup (0\,;\,+\infty)$
$a = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, n je sudé	$\mathcal{D}_f = \langle 0\,;\,+\infty)$
$a = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$, n je liché	$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

Derivace součtu, rozdílu, násobku

- $f(x) = u(x) + v(x)$ $\quad f'(x) = (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)$
- $g(x) = u(x) - v(x)$ $\quad g'(x) = (u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x)$
- $h(x) = k \cdot u(x),\ k \in \mathbb{R}$ $\quad h'(x) = (k \cdot u(x))' = k \cdot u'(x)$

$$\begin{aligned} (u+v)' &= u' + v' \\ (u-v)' &= u' - v' \\ (k \cdot u)' &= k \cdot u' \end{aligned}$$

Příklady:

- $f(x) = \ln x + x$
- $g(x) = 2^x - \dfrac{1}{x}$
- $h(x) = 5 \cdot \operatorname{tg} x$

Derivace součinu, podílu

- $f(x) = u(x) \cdot v(x)$
  $f'(x) = (u(x) \cdot v(x))' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- $g(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)},\ v(x) \neq 0$
  $$g'(x) = \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

$$\begin{aligned} (u \cdot v)' &= u'v + uv' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \end{aligned}$$

Příklady:

- $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^x$
- $g(x) = \dfrac{x^3}{2(x-1)}$
- $h(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$

Derivace složené funkce

$f(x) = v(u(x))$ $\quad v$ – vnější funkce, u – vnitřní funkce

$$f'(x) = (v(u(x)))' = v'(u(x)) \cdot u'(x)$$

$$(v(u))' = v'(u) \cdot u'$$

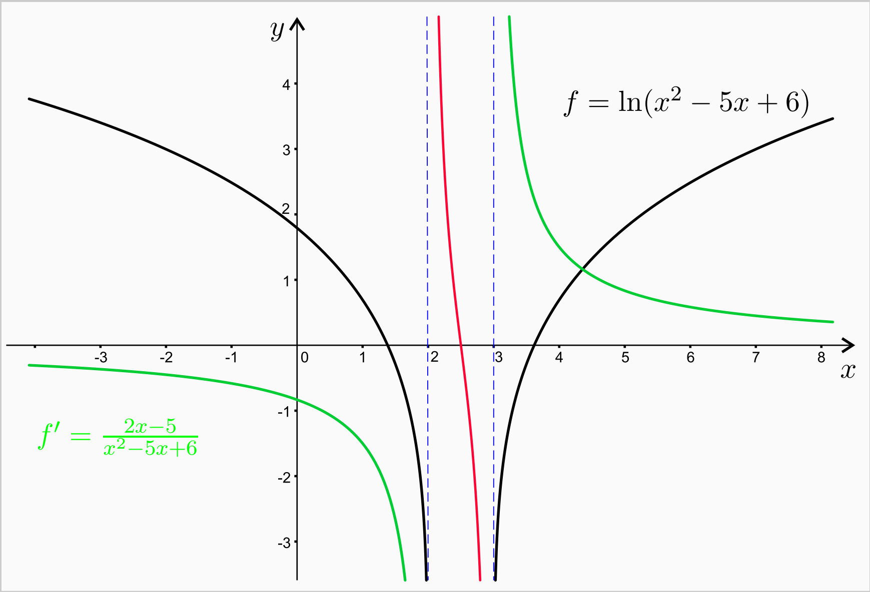
Příklady:

- $f(x) = (x-1)^2$
- $g(x) = (\ln x)^2$
- $h(x) = \ln(x^2)$

Příklady

1. $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$
2. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$
3. $f(x) = \sin(\sqrt{x})$
4. $f(x) = \sqrt{\sin x}$
5. $f(x) = \ln(\operatorname{cotg} x)$
6. $f(x) = \mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
8. $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^{-x}$
9. $f(x) = \cos\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)$
10. $f(x) = \sqrt[3]{\sin x^3}$
11. $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{2}{x}}$
12. $f(x) = \ln(\operatorname{arccotg} x)$
13. $f(x) = \operatorname{arccotg}(\ln x)$
14. $f(x) = \arcsin \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$

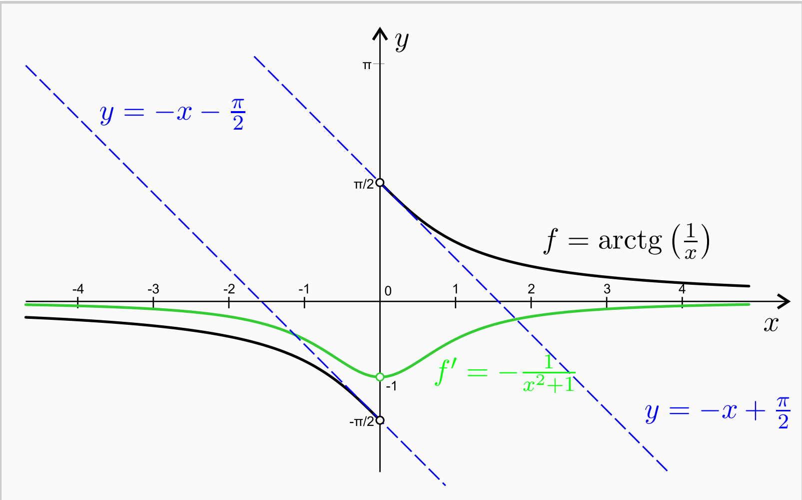
Příklady – výsledky



Příklady – výsledky

1. $\mathcal{D}_f = (-\infty\,;2) \cup (3\,;+\infty)$, $f'(x) = \dfrac{2x-5}{x^2-5x+6}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
2. $\mathcal{D}_f = (-\infty\,;0) \cup (0\,;+\infty)$, $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
3. $\mathcal{D}_f = \langle 0\,;+\infty)$, $f'(x) = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, $\mathcal{D}_{f'} = (0\,;+\infty)$
4. $\mathcal{D}_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle 2k\pi\,;\pi+2k\pi\rangle$, $f'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, $\mathcal{D}_{f'} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (2k\pi\,;\pi+2k\pi)$
5. $\mathcal{D}_f = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (k\pi\,;\frac{\pi}{2}+k\pi)$, $f'(x) = \dfrac{-1}{\sin x\cos x}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
6. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x}}}{3\sqrt[3]{x}}$, $\mathcal{D}_{f'} = (-\infty\,;0) \cup (0\,;+\infty)$
7. $\mathcal{D}_f = (-\infty\,;-1) \cup (1\,;+\infty)$, $f'(x) = \dfrac{x}{x^4-1}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$

Příklady – výsledky



Příklady – výsledky

8. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = (3x^2 - x^3)\cdot \mathrm{e}^{-x}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
9. $\mathcal{D}_f = \langle 0\,;+\infty)$, $f'(x) = \dfrac{-\sin\left(\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right)\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$, $\mathcal{D}_{f'} = (0\,;+\infty)$
10. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{x^2\cos x^3}{\sqrt[3]{(\sin x^3)^2}}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\sqrt[3]{k\pi}\right\}$
11. $\mathcal{D}_f = (0\,;2\rangle$, $f'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{\ln\frac{2}{x}}}$, $\mathcal{D}_{f'} = (0\,;2)$
12. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{1}{\operatorname{arccotg} x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
13. $\mathcal{D}_f = (0\,;+\infty)$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\dfrac{1}{x}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
14. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{2x}{|x|\,(1+x^2)}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$