Matematika I

4. PŘEDNÁŠKA 10. 3. 2017

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo používáme pro počítání limit neurčitých výrazů typu „$\frac{0}{0}$“ nebo „$\frac{\infty}{\infty}$“.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)},\qquad a\in\mathbb{R}^*\ (a\in\mathbb{R},\ a=-\infty,\ a=+\infty)$$

Pokud je $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ nebo $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty(-\infty)$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=+\infty(-\infty)$

a existuje $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

potom existuje $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

L'Hospitalovo pravidlo

Za splnění obdobných podmínek lze L'Hospitalovo pravidlo použít u limit

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}\qquad\text{a}\qquad\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)}{g(x)}.$$

L'Hospitalovo pravidlo – příklady

- $$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x^2}=\boxed{\frac{+\infty}{+\infty}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(\mathrm{e}^x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2x}=\boxed{\frac{+\infty}{+\infty}}\overset{L'H}{=}$$
  $$=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2}=+\infty$$

- $$\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{x^2-1}=\boxed{\frac{0}{0}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to1}\frac{(\ln x)'}{(x^2-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x}{\ln(x+1)}=\boxed{\frac{0}{0}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0}\frac{(\operatorname{tg}x)'}{\ln(x+1)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{1}{x+1}}=\frac{1}{1}=1$$

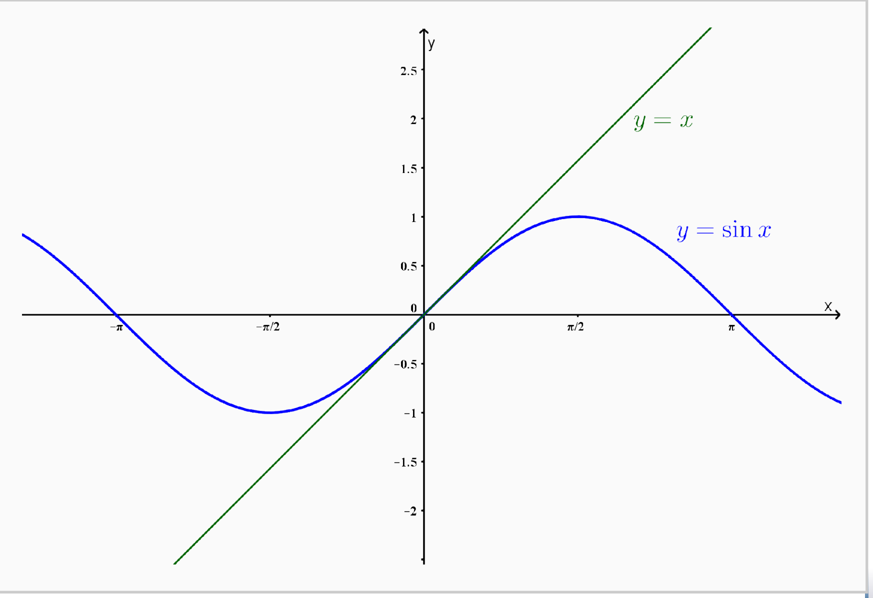
Limity jako „vzorečky“

Odvození některých „vzorců“

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \boxed{\dfrac{0}{0}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1} = 1$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x^3}$
  - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\sin 3x}$
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = \boxed{\dfrac{0}{0}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1} = 1$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = \boxed{\dfrac{0}{0}} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+1}}{1} = 1$

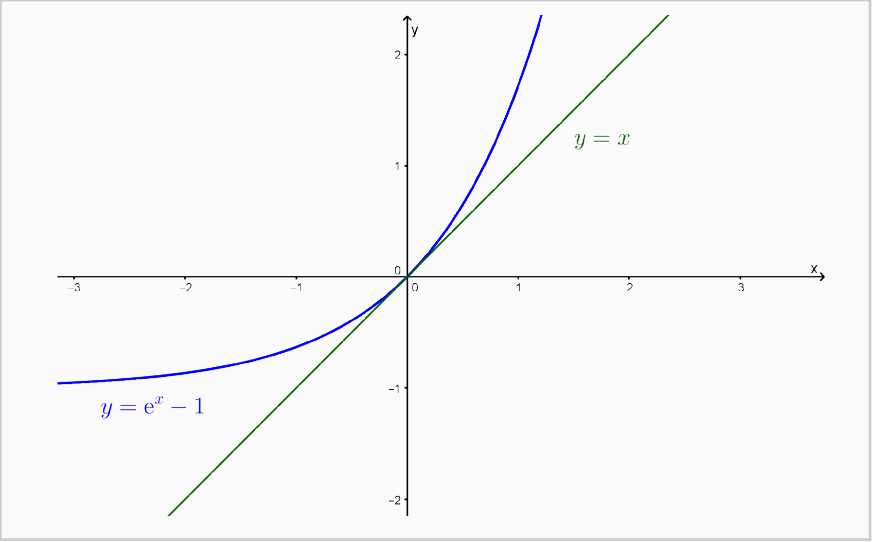
Limity jako „vzorečky“

Odvození některých „vzorců“



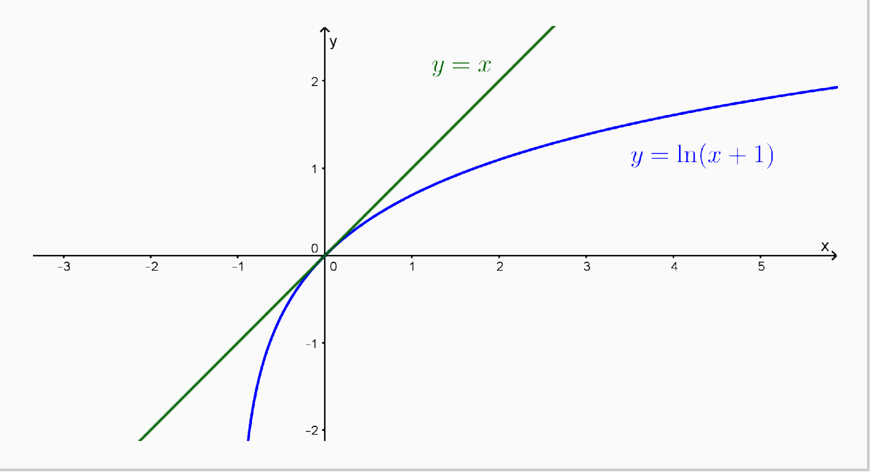
Limity jako „vzorečky“

Odvození některých „vzorců“



Limity jako „vzorečky“

Odvození některých „vzorců“



Neurčitý výraz „$0 \cdot \infty$“

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = „0\cdot\infty“$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \qquad \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{?\infty}$$

- $\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x \cdot x^2$
- $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \ln(x^2)$

Neurčitý výraz „$\infty - \infty$“

$$\lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = „\infty - \infty“$$

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot\left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = \infty\left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x\to a} g(x)\cdot\left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = \infty\left(\frac{\infty}{\infty} - 1\right)$$

- $\lim_{x\to+\infty} (\ln x - x)$
- $\lim_{x\to+\infty} (x - \mathrm{e}^x)$

Neurčitý výraz „$\infty - \infty$“

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}\right) = „\frac{1}{0} - \frac{1}{0}“$$

Je nutno *ověřit* zda je výraz $\frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ neurčitý.

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - f(x)}{f(x)\cdot g(x)} = \frac{0}{0}$$

- $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2x - \pi}\right)$
- $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

Příklady

1. $\lim_{x\to 0} (x\cdot \operatorname{cotg} x)$ — 1
2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ — 1
3. $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x}\cdot 2^x\right)$ — 0
4. $\lim_{x\to 0^+} (\ln x \cdot \sin x)$ — 0
5. $\lim_{x\to 0} \left(\ln x^2 + \operatorname{cotg} x\right)$ — neex.
6. $\lim_{x\to\pi} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\pi - x}\right)$ — 0
7. $\lim_{x\to+\infty} \left(x^5 - \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)$ — $+\infty$