

Matematika I

4. PŘEDNÁŠKA 16. 3. 2018

1 L'Hospitalovo pravidlo

2 Odvození některých „vzorců“

3 Užití u neurčitých výrazů

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

4 Příklady

L'Hospitalovo pravidlo

Za splnění obdobných podmínek lze L'Hospitalovo pravidlo použít u limit

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$$

L'Hospitalovo pravidlo

L'Hospitalovo pravidlo používáme pro počítání limit neurčitých výrazů typu „ $\frac{0}{0}$ “ nebo „ $\frac{\infty}{\infty}$ “.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad a \in \mathbb{R}^* \quad (a \in \mathbb{R}, a = -\infty, a = +\infty)$$

Pokud je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$

a existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

potom existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

L'Hospitalovo pravidlo – příklady

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} &= \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty} \stackrel{L'H}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = +\infty \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\ln(x+1)} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\operatorname{tg} x)'}{\ln(x+1)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Limity jako „vzorečky“

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}$$

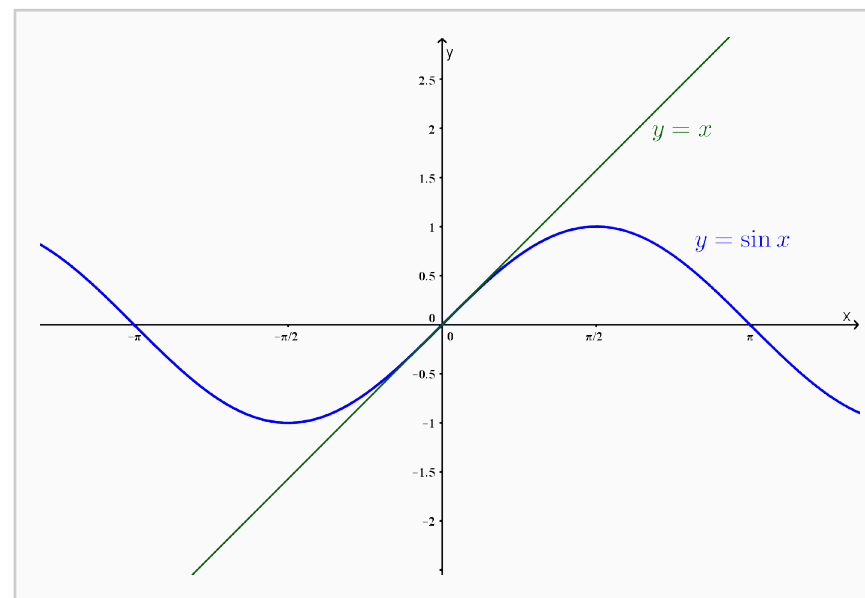
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin 3x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

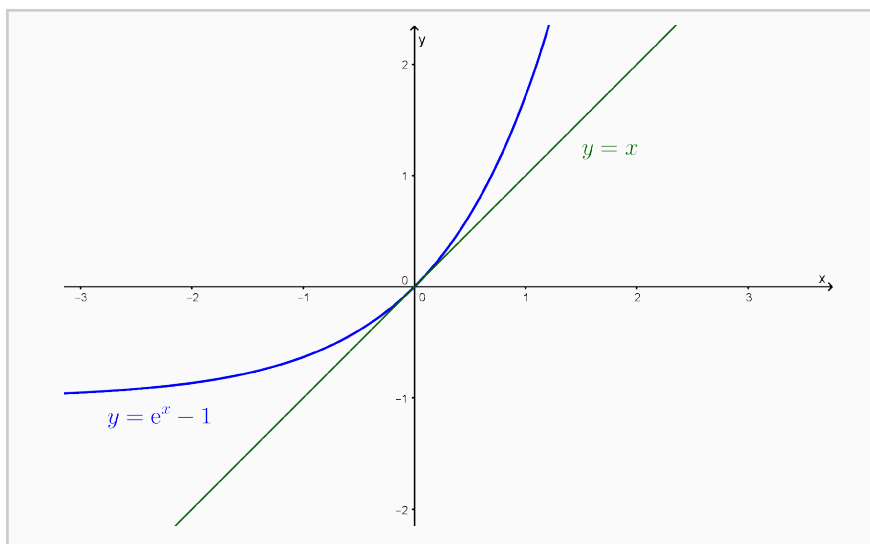
$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

$$\blacksquare \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{0}{0} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

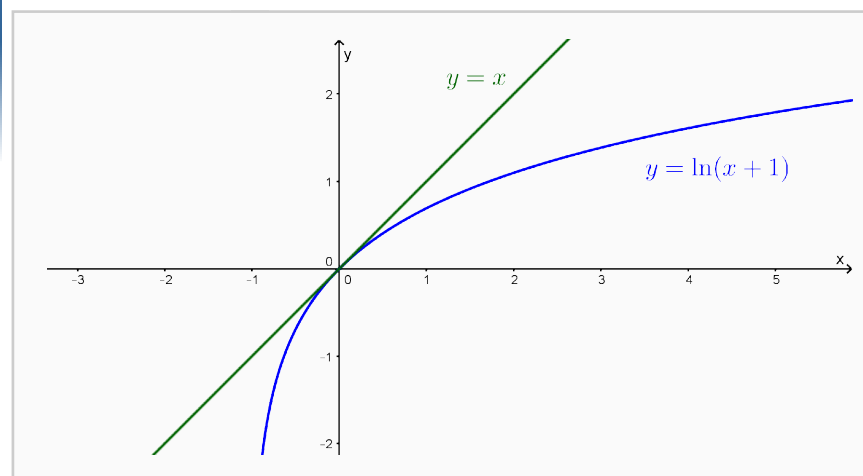
Limity jako „vzorečky“



Limity jako „vzorečky“



Limity jako „vzorečky“



Neurčitý výraz „ $0 \cdot \infty$ “

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = „0 \cdot \infty“$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot x^2$
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \ln(x^2)$

Neurčitý výraz „ $\infty - \infty$ “

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = „\infty - \infty“$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \left(1 - \frac{g(x)}{f(x)}\right) = \infty \left(1 - \frac{\infty}{\infty}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \cdot \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right) = \infty \left(\frac{\infty}{\infty} - 1\right)$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - e^x)$

Neurčitý výraz „ $\infty - \infty$ “

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}\right) = „\frac{1}{0} - \frac{1}{0}“$$

Je nutno ověřit zda je výraz $\frac{1}{f} - \frac{1}{g}$ neurčitý.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - f(x)}{f(x) \cdot g(x)} = \frac{0}{0}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{2x - \pi}\right)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

Příklady

- | | | | | | |
|---|--|---|---|--|-----------|
| 1 | $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cotg x)$ | 1 | 5 | $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x^2 + \cotg x)$ | neex. |
| 2 | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ | 1 | 6 | $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\pi - x}\right)$ | 0 |
| 3 | $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x} \cdot 2^x)$ | 0 | 7 | $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - e^{\frac{x}{2}})$ | $+\infty$ |
| 4 | $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x \cdot \sin x)$ | 0 | | | |