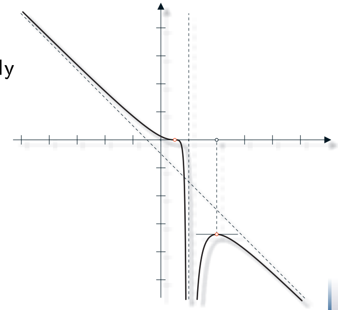
Matematika I

5. PŘEDNÁŠKA 23. 3. 2018

1 Vlastnosti funkce a grafu
- Definiční obor, symetrie, periodicita, průsečíky
- Chování v krajních bodech intervalů definičního oboru
- První derivace – monotonie, lokální extrémy
- Druhá derivace – konvexnost, konkávnost, inflexní body

2 Průběh funkce
- Doporučený postup při vyšetřování průběhu funkce
- Průběh funkce – příklad



Sudé funkce

Graf funkce f je souměrný podle osy y právě tehdy, když je funkce f **sudá**, tj. když pro každé $x \in \mathcal{D}_f$ platí

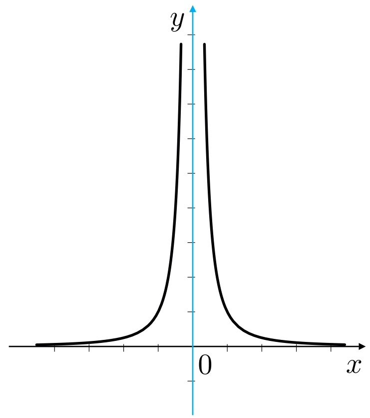
$$-x \in \mathcal{D}_f$$

a

$$f(-x) = f(x).$$

Příklad: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$$



Liché funkce

Graf funkce f je souměrný podle počátku $[0\,;0]$ právě tehdy, když je funkce f **lichá**, tj. když pro každé $x \in \mathcal{D}_f$ platí

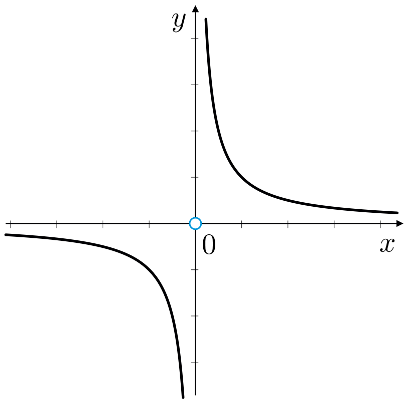
$$-x \in \mathcal{D}_f$$

a

$$f(-x) = -f(x).$$

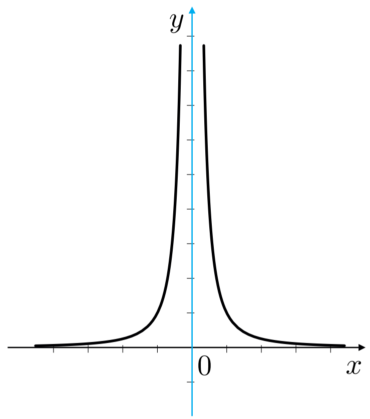
Příklad: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

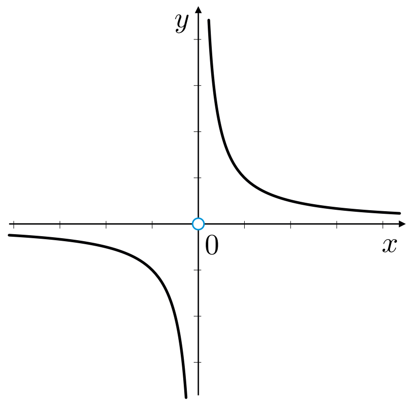


Symetrie grafu funkce

Sudá funkce



Lichá funkce



Pokud není definiční obor funkce symetrický podle počátku soustavy souřadnic, nemůže být funkce sudá ani lichá!

Periodické funkce

Graf funkce f se skládá z pravidelně se opakujících částí, pokud je funkce f **periodická**.

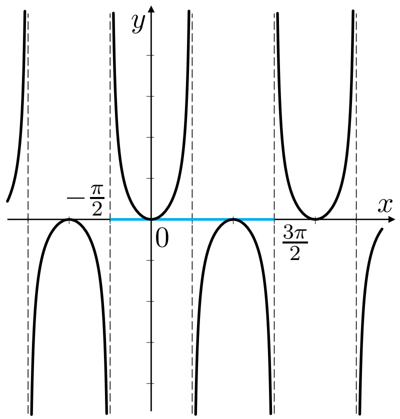
Tedy když existuje $p \in \mathbb{R}$ tak, že pro každé $x \in \mathcal{D}_f$ a $k \in \mathbb{Z}$ platí

$$x + kp \in \mathcal{D}_f$$

a

$$f(x + kp) = f(x).$$

Jako **základní periodu** funkce označujeme nejmenší kladné číslo p, pro které platí uvedený vztah.



Příklad: $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \sin x$

$f(x + 2\pi) = \operatorname{tg}(x + 2\pi) \cdot \sin(x + 2\pi) = \operatorname{tg}(x) \cdot \sin(x) = f(x)$

Průsečíky grafu s osami x a y

Pro určení průsečíků grafu funkce f s osou x řešíme rovnici

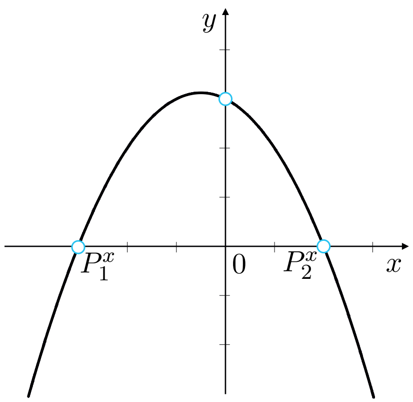
$$f(x) = 0.$$

Příklad: $f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 3$

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 3 &= 0 \\ -\frac{1}{2}(x+3)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = -3 \qquad x_2 = 2$$

$$P_1^x[-3\,;0] \qquad P_2^x[2\,;0]$$



Průsečíky grafu s osami x a y

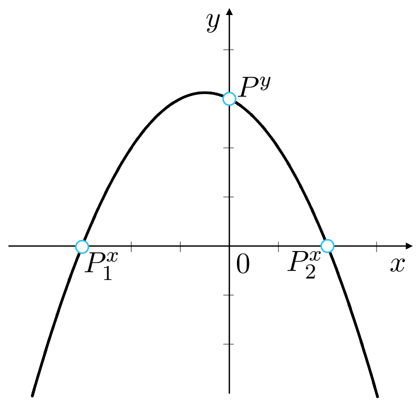
Pokud je $0 \in \mathcal{D}_f$ určíme průsečík grafu funkce f s osou y

$$P^y[0\,;f(0)].$$

Příklad: $f(x) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + 3$

$$f(0) = 3$$

$$P^y[0\,;3]$$



Krajní body intervalů definičního oboru

V krajních bodech definičního oboru spočítáme funkční hodnoty nebo limity funkce.

Zjistíme zda existují

- vodorovné asymptoty,
- svislé asymptoty,
- šikmé asymptoty.

Vodorovné a svislé asymptoty

- Pokud existuje $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ a je $A \in \mathbb{R}$, potom říkáme, že funkce f má u $+\infty$ vodorovnou asymptotu
$$y = A.$$
- Pokud existuje $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B$ a je $B \in \mathbb{R}$, potom říkáme, že funkce f má u $-\infty$ vodorovnou asymptotu
$$y = B.$$
- Pokud je $a \in \mathbb{R}$ a platí, že
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} \quad \text{nebo} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases},$$
potom říkáme, že funkce f má svislou asymptotu
$$x = a.$$

Šikmé asymptoty

- Pokud je $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_1$ $(k_1 \in \mathbb{R})$

  a $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 \cdot x) = q_1$ $(q_1 \in \mathbb{R})$,

  potom je přímka $y = k_1 x + q_1$

  šikmá asymptota grafu funkce $f(x)$ u $+\infty$.
- Pokud je $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k_2$ $(k_2 \in \mathbb{R})$

  a $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 \cdot x) = q_2$ $(q_2 \in \mathbb{R})$,

  potom je přímka $y = k_2 x + q_2$

  šikmá asymptota grafu funkce $f(x)$ u $-\infty$.

Má-li funkce f u $+\infty$ $(-\infty)$ vodorovnou asymptotu, není třeba u $+\infty$ $(-\infty)$ ověřovat existenci šikmé asymptoty.

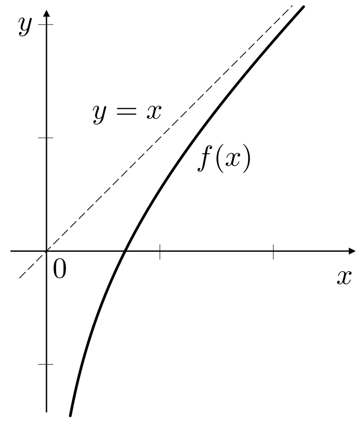
Šikmé asymptoty – příklad

$$f(x) = \ln(e^x - 1)$$

$\mathcal{D}_f = (0, +\infty)$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^x-1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = 1$$

$$\begin{aligned} q &= \lim_{x\to\infty} \left(\ln(e^x-1) - k\cdot x\right) = \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\ln(e^x-1) - x\right) = \\ &= \lim_{x\to\infty} \left(\ln(e^x-1) - \ln e^x\right) = \\ &= \lim_{x\to\infty} \ln \frac{e^x-1}{e^x} = \ln 1 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} y &= k\cdot x + q \\ y &= 1\cdot x + 0 \end{aligned}$$

Přímka $y = x$ je šikmá asymptota grafu funkce f u $+\infty$.

Funkce rostoucí, funkce klesající

Funkce f je rostoucí na intervalu $(a,b) \subset \mathcal{D}_f$
pokud pro každou dvojici x_1, x_2 z intervalu (a,b) platí:
je-li $x_1 < x_2$, pak je $f(x_1) < f(x_2)$.

Funkce f je klesající na intervalu $(a,b) \subset \mathcal{D}_f$
pokud pro každou dvojici x_1, x_2 z intervalu (a,b) platí:
je-li $x_1 < x_2$, pak je $f(x_1) > f(x_2)$.

První derivace a monotonie funkce

Monotonii funkce v bodě $[a,f(a)]$ a v jeho okolí
dokážeme určit pomocí tečny ke grafu funkce a její směrnice.

Nechť má funkce f v každém bodě intervalu $(a,b) \subset \mathcal{D}_f$ vlastní derivaci.
Potom říkáme, že

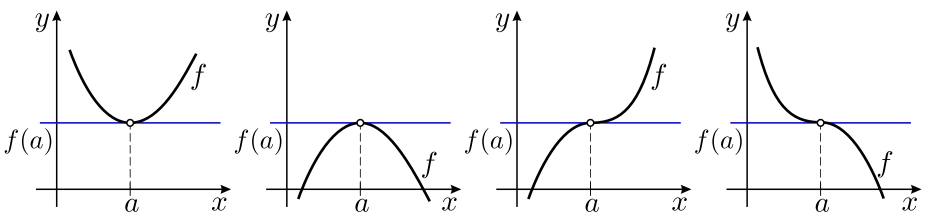
funkce f je **rostoucí** na intervalu (a,b)
právě tehdy, když pro každé $x \in (a,b)$ je
$f'(x) > 0$;

funkce f je **klesající** na intervalu (a,b)
právě tehdy, když pro každé $x \in (a,b)$ je
$f'(x) < 0$.

Vodorovná tečna

Předpokládejme, že pro $a \in \mathcal{D}_f$ platí: $f'(a) = 0$.

- Potom má graf funkce f v bodě $[a,\ f(a)]$ vodorovnou tečnu
  a nastává jedna z následujících možností:



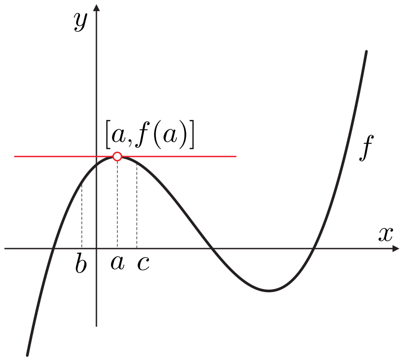
funkce má v bodě $[a,\ f(a)]$
lokální extrém

funkce má v bodě $[a,\ f(a)]$
inflexní bod

Lokální extrémy

Předpokládejme, že pro $a \in \mathcal{D}_f$ platí:

- $f'(a) = 0$,
- existuje interval (b,a), na kterém je funkce f rostoucí,
- existuje interval (a,c), na kterém je funkce f klesající.



Potom říkáme, že funkce f nabývá v bodě a **lokálního maxima**.

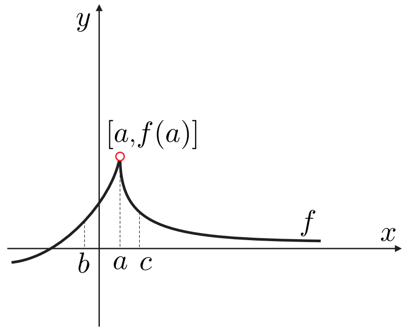
Graf funkce f má v bodě $[a,f(a)]$

- tečnu rovnoběžnou s osou x

Lokální extrémy

Předpokládejme, že pro $a \in \mathcal{D}_f$ platí:

- $f'(a) = 0$,
  nebo $f'(a)$ neexistuje,
- existuje interval (b,a), na kterém je funkce f rostoucí,
- existuje interval (a,c), na kterém je funkce f klesající.



Potom říkáme, že funkce f nabývá v bodě a **lokálního maxima**.

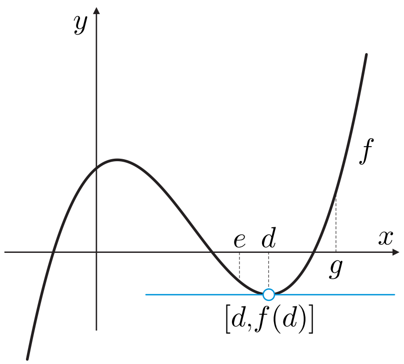
Graf funkce f má v bodě $[a,f(a)]$

- tečnu rovnoběžnou s osou x,
- **nebo** špičku.

Lokální extrémy

Předpokládejme, že pro $d \in \mathcal{D}_f$ platí:

- $f'(d) = 0$,
- existuje interval (e,d), na kterém je funkce f klesající,
- existuje interval (d,g), na kterém je funkce f rostoucí.



Potom říkáme, že funkce f nabývá v bodě d **lokálního minima**.

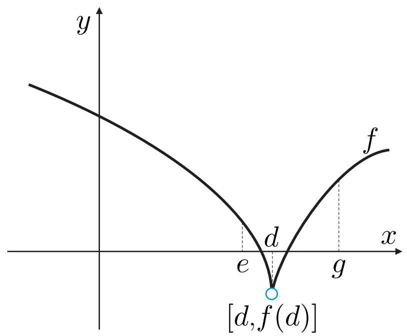
Graf funkce f má v bodě $[d,f(d)]$

- tečnu rovnoběžnou s osou x

Lokální extrémy

Předpokládejme, že pro $d \in \mathcal{D}_f$ platí:

- $f'(d) = 0$,
  nebo $f'(d)$ neexistuje,
- existuje interval (e,d), na kterém je funkce f klesající,
- existuje interval (d,g), na kterém je funkce f rostoucí.



Potom říkáme, že funkce f nabývá v bodě d **lokálního minima**.

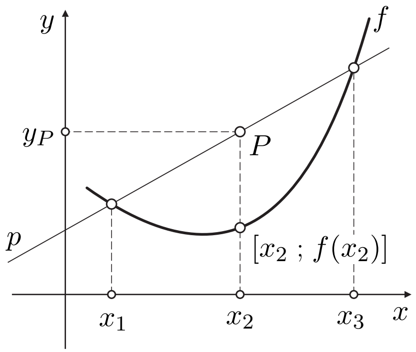
Graf funkce f má v bodě $[d,f(d)]$

- tečnu rovnoběžnou s osou x,
- **nebo** špičku.

Funkce konvexní

Předpokládejme, že

- $\{x_1 ; x_2 ; x_3\} \subset (a,b) \subset \mathcal{D}_f$, $x_1 < x_2 < x_3$;
- přímka p spojuje body $[x_1 ; f(x_1)]$ a $[x_3 ; f(x_3)]$;
- bod $P[x_2 ; y_P]$ je bodem přímky p.

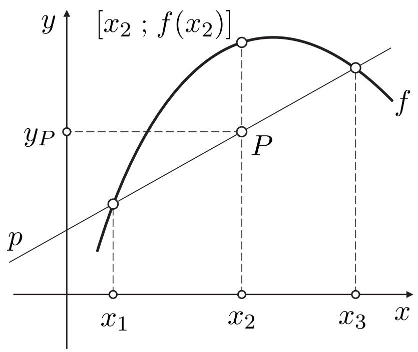


Funkce f je **konvexní** na intervalu $(a,b) \subset \mathcal{D}_f$ právě tehdy, když pro každou trojici x_1, x_2, x_3 z intervalu (a,b) platí: je-li $x_1 < x_2 < x_3$, potom je bod $[x_2 ; f(x_2)]$ **pod** přímkou p, tj. $f(x_2) < y_P$.

Funkce konkávní

Předpokládejme, že

- $\{x_1 ; x_2 ; x_3\} \subset (a,b) \subset \mathcal{D}_f$, $x_1 < x_2 < x_3$;
- přímka p spojuje body $[x_1 ; f(x_1)]$ a $[x_3 ; f(x_3)]$;
- bod $P[x_2 ; y_P]$ je bodem přímky p.



Funkce f je **konkávní** na intervalu $(a,b) \subset \mathcal{D}_f$ právě tehdy, když pro každou trojici x_1, x_2, x_3 z intervalu (a,b) platí: je-li $x_1 < x_2 < x_3$, potom je bod $[x_2 ; f(x_2)]$ **nad** přímkou p, tj. $f(x_2) > y_P$.

Druhá derivace a konvexnost, konkávnost grafu

Konvexnost nebo konkávnost grafu funkce v bodě $[a,f(a)]$ a v jeho okolí dokážeme určit pomocí druhé derivace funkce.

Nechť má funkce f v každém bodě intervalu (a,b) vlastní 2. derivaci. Potom říkáme, že

funkce f je **konvexní** na intervalu (a,b) právě tehdy, když pro každé $x \in (a,b)$ je $f''(x) > 0$;

funkce f je **konkávní** na intervalu (a,b) právě tehdy, když pro každé $x \in (a,b)$ je $f''(x) < 0$.

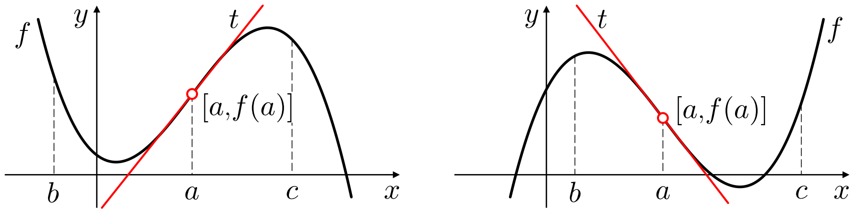
Inflexní bod

Předpokládejme, že $f''(a) = 0$ a

- existuje interval (b,a), na kterém je funkce f konvexní,
- existuje interval (a,c), na kterém je funkce f konkávní.

nebo

- existuje interval (b,a), na kterém je funkce f konkávní,
- existuje interval (a,c), na kterém je funkce f konvexní.



Potom říkáme, že bod $[a,f(a)]$ je **inflexní bod** grafu funkce f.

Graf funkce v inflexním bodě „přechází přes tečnu".

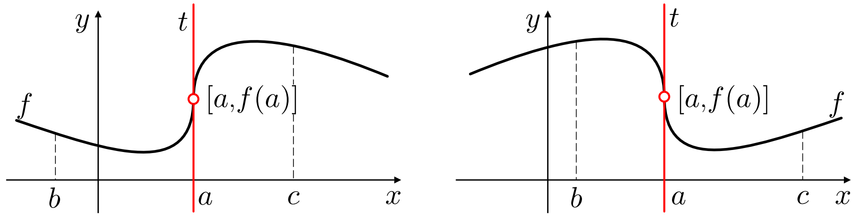
Inflexní bod

Nebo předpokládejme, že graf funkce f má v $[a,f(a)]$ svislou tečnu (tj. $\lim_{x\to a} f'(x) = +\infty$ nebo $\lim_{x\to a} f'(x) = -\infty$) a

- existuje interval (b,a), na kterém je funkce f konvexní,
- existuje interval (a,c), na kterém je funkce f konkávní.

nebo

- existuje interval (b,a), na kterém je funkce f konkávní,
- existuje interval (a,c), na kterém je funkce f konvexní.



Potom říkáme, že bod $[a,f(a)]$ je **inflexní bod** grafu funkce f.

Graf funkce v inflexním bodě „přechází přes tečnu".

Doporučený postup při vyšetřování průběhu funkce

0 **Určíme definiční obor $\mathcal{D}_f$**

1 **Vše, co lze zjistit z předpisu funkce**

- Je-li $\mathcal{D}_f$ souměrný podle počátku, zjistíme, zda je funkce sudá nebo lichá. Pokud ano, omezíme se při výpočtech pouze na polovinu definičního oboru.
- Zjistíme, zda je funkce periodická. Pokud ano, omezíme se při výpočtech na jednu periodu (nebo na zadanou část $\mathcal{D}_f$).
- Určíme průsečíky grafu funkce se souřadnicovými osami.
  - Pro průsečíky s osou x řešíme rovnici $f(x) = 0$.
  - Pokud $0 \in \mathcal{D}_f$, je průsečík s osou y bod $[0, f(0)]$.
- Vypočítáme funkční hodnoty, nebo limity funkce v krajních bodech intervalů definičního oboru.
  - Napíšeme rovnice vodorovných, svislých, případně šikmých asymptot grafu funkce.
- Pokud je to na základě dosavadních výpočtů možné, **nakreslíme náčrtek grafu funkce**.

Doporučený postup při vyšetřování průběhu funkce

2 **Vše, co lze zjistit z první derivace**

- Vypočítáme první derivaci a stanovíme $\mathcal{D}_{f'}$.
- Určíme stacionární body funkce, řešíme rovnici $f'(x) = 0$.
- V bodech $\mathcal{D}_f \setminus \mathcal{D}_{f'}$ vypočítáme (jednostranné) derivace.
- Sestavíme tabulku pro první derivaci, ve které je třeba vyznačit
  - body, ve kterých má funkce vodorovné tečny (tj. kde je $f' = 0$),
  - intervaly, na kterých je funkce rostoucí (tj. kde je $f' > 0$),
  - intervaly, na kterých je funkce klesající (tj. kde je $f' < 0$),
  - body, ve kterých má funkce svislé tečny (tj. kde je „$f' = +\infty$“ nebo „$f' = -\infty$“),
  - body, ve kterých má graf funkce špičky (tj. kde f' neexistuje).
- U stacionárních bodů je třeba rozlišit, jestli se jedná o lokální minimum, lokální maximum, nebo inflexní bod.
- Napíšeme rovnice vodorovných, případně svislých tečen a tečen v dalších zadaných bodech.
- **Nakreslíme náčrtek grafu funkce**, zkontrolujeme a opravíme případné rozpory.

Doporučený postup při vyšetřování průběhu funkce

3 **Vše, co lze zjistit z druhé derivace**

- Vypočítáme druhou derivaci a určíme $\mathcal{D}_{f''}$.
- Sestavíme tabulku pro druhou derivaci, ve které je třeba vyznačit
  - body, ve kterých je druhá derivace nulová (řešíme rovnici $f''(x) = 0$),
  - intervaly, na kterých je funkce konvexní (tj. kde je $f'' > 0$),
  - intervaly, na kterých je funkce konkávní (tj. kde je $f'' < 0$).
- U bodů s nulovou druhou derivací je třeba určit, zda se jedná o inflexní bod.
- Napíšeme rovnice tečen ke grafu funkce v inflexních bodech.

Doporučený postup při vyšetřování průběhu funkce

4 **Graf funkce**

- Graf vynášíme v kartézské soustavě souřadnic se stejnými jednotkami na osách x i y.
- Vždy vynášíme všechny vodorovné tečny.
- Vynášíme spočtené asymptoty, tečny v inflexních bodech a ostatní požadované tečny.
- Všechny přímky (osy, tečny, asymptoty) rýsujeme pravítkem – musí odpovídat spočteným rovnicím.
- Pro vynášení přesných hodnot lze využívat čtverečkovaného nebo milimetrového papíru.
- Předpokládá se znalost přibližných hodnot často se vyskytujících výrazů, např.:

$$\sqrt{2} \doteq 1{,}4; \quad \sqrt{3} \doteq 1{,}7; \quad \sqrt{5} \doteq 2{,}2;$$
$$\mathrm{e} \doteq 2{,}7; \quad \mathrm{e}^2 \doteq 7{,}4; \quad \sqrt{\mathrm{e}} \doteq 1{,}7; \quad \ln 2 \doteq 0{,}7$$

Průběh funkce – příklad

Vyšetřete průběh funkce f.
V grafu nakreslete všechny asymptoty, vodorovné tečny a tečny v inflexních bodech. Určete tečnu grafu funkce v bodě $[0,f(0)]$.
Napište obecné rovnice všech určených tečen a asymptot.

$$f(x) = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$$

Průběh funkce – příklad

$$f(x) = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$$

$\mathcal{D}_f = (-\infty,2) \cup (2,+\infty)$

1
- $\mathcal{D}_f$ není symetrický podle počátku, f není sudá ani lichá.
- $P^y = \left[0\,;\,\frac{1}{4}\right]$, $P^x = [1\,;\,0]$
- $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$ Graf funkce f nemá vodorovnou asymptotu.

  $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -\infty\end{array}\right\}$ Graf funkce f má svislou asymptotu $x = 2$.
- $k_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ $\quad k_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$

  $q_1 = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+x) = -1$ $\quad q_2 = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)+x) = -1$

  Graf funkce f má u $-\infty$ i $+\infty$ stejnou šikmou asymptotu $y = -x-1$.

Průběh funkce – příklad

2 $f'(x) = \dfrac{(1-x)^2(4-x)}{(x-2)^3}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	$(2,4)$	4	$(4,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\nearrow$	$-\frac{27}{4}$	$\searrow$

- Graf funkce f má vodorovné tečny t_1: $y = 0$ a t_2: $y = -\frac{27}{4}$.
- Bod $[1\,;\,0]$ je inflexní bod.
- Bod $\left[4\,;\,-\frac{27}{4}\right]$ je lokální maximum.

Tečna ke grafu f v bodě $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ je přímka t_3: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

Průběh funkce – příklad

3 $f''(x) = \dfrac{6(1-x)}{(x-2)^4}$, $\mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$\cup$	0	$\cap$	$\cap$

- Bod $[1,0]$ je inflexní bod.
- Tečna v inflexním bodě $[1,0]$ je přímka $y = 0$.

Průběh funkce – příklad