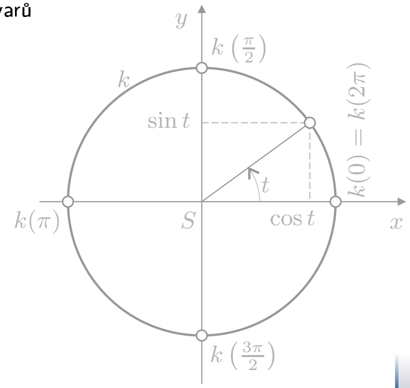
Matematika I

6. PŘEDNÁŠKA 31. 3. 2017



Předpokládané znalosti

- kartézská soustava souřadnic
- vektory
  - operace s vektory (sčítání, násobení konstantou, skalární součin, vektorový součin)
  - lineární závislost $\times$ nezávislost vektorů
  - velikost vektoru, odchylka vektorů
- přímka v rovině a v prostoru
  - vektorová rovnice a parametrické rovnice přímky v rovině a v prostoru
  - obecná rovnice přímky v rovině
  - rovnice přímky ve směrnicovém tvaru
- rovina v prostoru
  - vektorová rovnice a parametrické rovnice roviny v prostoru
  - obecná rovnice roviny

Předpokládané znalosti

- analytický popis kuželoseček
  - rovnice kuželoseček v obecném a středovém (vrcholovém) tvaru
  - odvození rovnice kuželosečky ze zadaných prvků
  - odvození parametrů kuželosečky z rovnice (souřadnice vrcholů, ohnisek, velikosti poloos, ...)
  - rovnice tečny (v bodě, z bodu, daného směru)

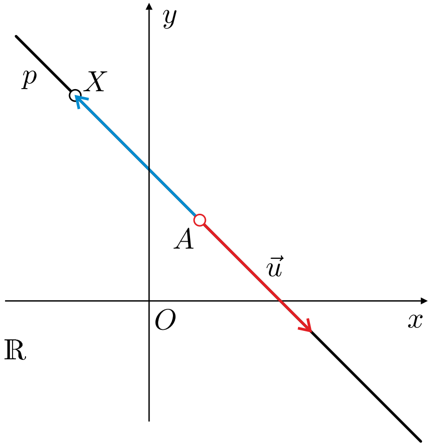
Přímka v rovině

Přímka p je určena bodem $A[a_1,a_2]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{u}(u_1,u_2)$.

- Každý bod $X[x,y]$ přímky p lze popsat pomocí vektorové rovnice $X = A + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$
- Rozpisem do souřadnic získáme parametrické rovnice přímky p.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$p: \begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2, \; t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

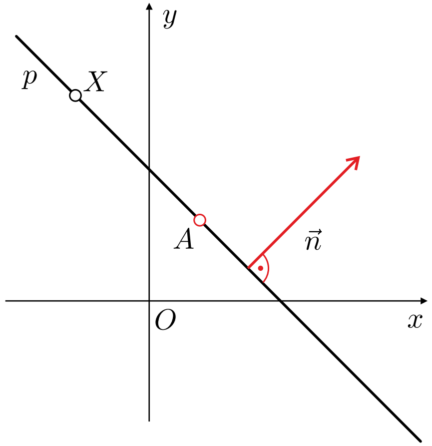


Přímka v rovině

Přímka p je určena bodem $A[a_1,a_2]$ a nenulovým normálovým vektorem $\vec{n}(a,b)$.

- Souřadnice libovolného bodu $X[x,y]$ přímky p vyhovují obecné rovnici přímky

$$p: a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$$
$$a \in \mathbb{R},\; b \in \mathbb{R},\; c \in \mathbb{R}.$$



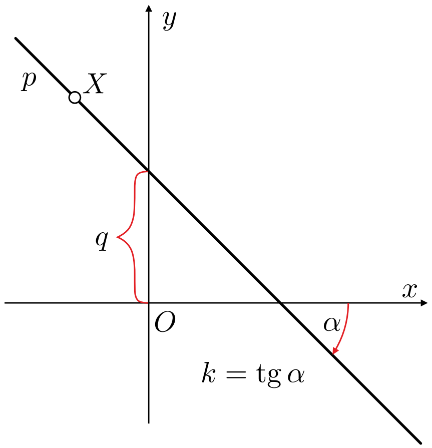
Přímka v rovině

Přímka p je určena směrnicí $k \in \mathbb{R}$ a posunutím $q \in \mathbb{R}$.

- Přímka p je popsána jako graf lineární funkce.
- Souřadnice libovolného bodu $X[x,y]$ přímky p vyhovují rovnici přímky ve směrnicovém tvaru

$$p: y = k \cdot x + q.$$

- Tímto způsobem nelze popsat přímky rovnoběžné s osou y.

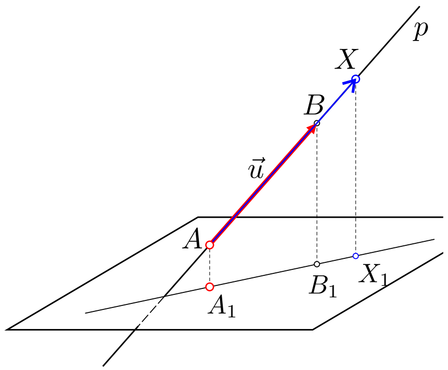


Přímka v prostoru

Přímka p je určena bodem $A[a_1,a_2,a_3]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$.

- Každý bod $X[x,y,z]$ přímky p lze popsat pomocí vektorové rovnice $X = A + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$
- Rozpisem do souřadnic získáme parametrické rovnice přímky p.

$$p: \begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2, \\ z &= a_3 + t \cdot u_3, \; t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Přímku v prostoru nelze popsat jednou rovnicí!

Rovina

Rovina ϱ je určena bodem $A[a_1,a_2,a_3]$ a dvěma nenulovými lineárně nezávislými směrovými vektory $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ a $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$.

- Každý bod $X[x,y,z]$ roviny ϱ lze popsat pomocí vektorové rovnice
$$X = A + t\cdot\vec{u} + s\cdot\vec{v},\ t\in\mathbb{R},\ s\in\mathbb{R}.$$
- Rozpisem do souřadnic získáme parametrické rovnice roviny ϱ.

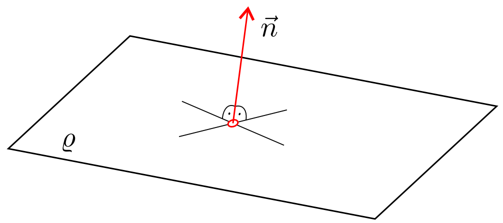
$$\begin{aligned}\varrho:\ x &= a_1 + t\cdot u_1 + s\cdot v_1,\\ y &= a_2 + t\cdot u_2 + s\cdot v_2,\\ z &= a_3 + t\cdot u_3 + s\cdot v_3,\\ & \quad t\in\mathbb{R},\ s\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

Rovina

Matematický popis základních geometrických útvarů

Rovina ϱ je určena bodem $A[a_1,a_2,a_3]$ a nenulovým normálovým vektorem $\vec{n}(a,b,c)$.

- Souřadnice libovolného bodu $X[x,y,z]$ roviny ϱ vyhovují obecné rovnici roviny ϱ
$$\varrho : a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z + d = 0,$$
$$a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R},\ d\in\mathbb{R}.$$



Obecná rovnice kuželosečky

Matematický popis základních geometrických útvarů

$$A\cdot x^2 + B\cdot x\cdot y + C\cdot y^2 + D\cdot x + E\cdot y + F = 0,$$
$$\{A,B,C,D,E,F\}\subset\mathbb{R}\quad \{A,B,C\}\neq\{0,0,0\}$$

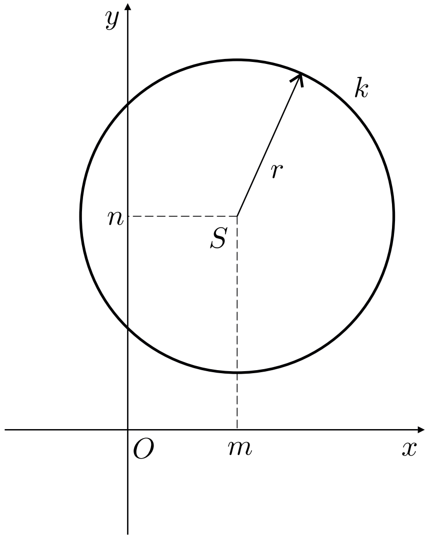
Takovou rovnicí lze popsat:

- kružnici,
- elipsu,
- parabolu,
- hyperbolu,
- dvě různoběžné přímky,
- dvě různé rovnoběžné přímky,
- jednu (dvojnásobnou) přímku,
- bod,
- prázdnou množinu.

Kružnice

Rovnice kružnice ve středovém tvaru

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

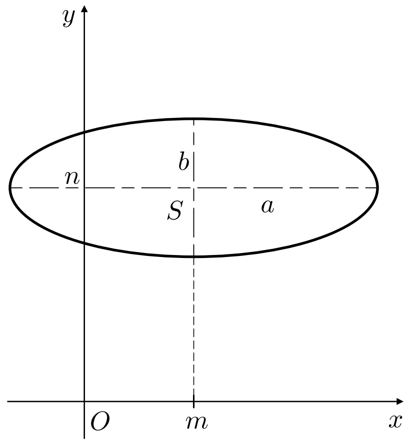


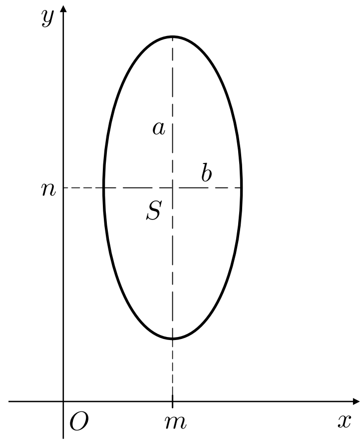
Elipsa

Matematický popis základních geometrických útvarů

Rovnice elipsy ve středovém tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$



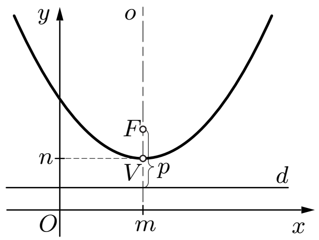


Parabola

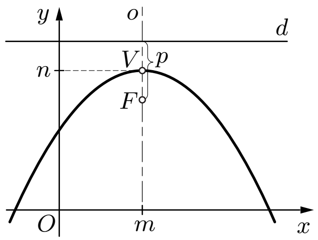
Matematický popis základních geometrických útvarů

Rovnice paraboly ve vrcholovém tvaru

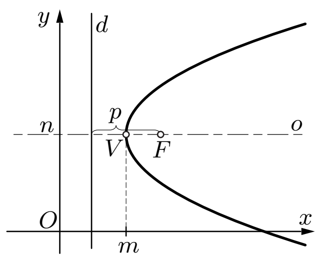
$$(x-m)^2 = 2p(y-n)$$



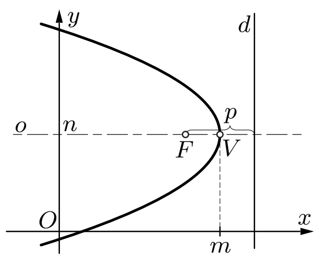
$$(x-m)^2 = -2p(y-n)$$



$$(y-n)^2 = 2p(x-m)$$



$$(y-n)^2 = -2p(x-m)$$

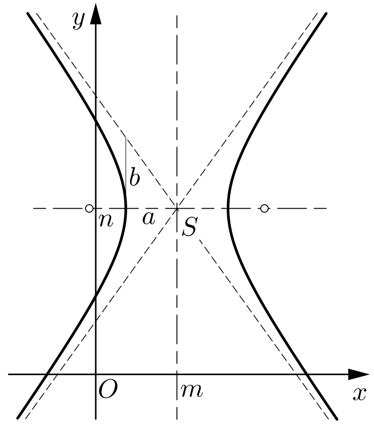


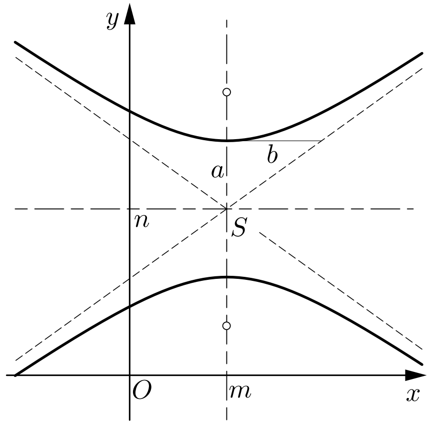
Hyperbola

Matematický popis základních geometrických útvarů

Rovnice hyperboly ve středovém tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$$





Způsoby popisu křivek

Graf funkce f jako rovinná křivka.

$$\{[x,f(x)] \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathcal{D}_f\}$$

Příklad: Graf funkce $f(x) = x^2$ je parabola v rovině $\mathbb{R}^2$.

Implicitně zadané křivky v rovině $\mathbb{R}^2$.

$$\{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = 0\}$$

Příklad: Kružnice o středu $[0,0]$ a poloměru r: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Křivky dané parametricky.

křivka $k(t)$ v $\mathbb{R}^2$: $\{[x(t),y(t)]\}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$

křivka $k(t)$ v $\mathbb{R}^3$: $\{[x(t),y(t),z(t)]\}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$

Příklad: Přímka p určená bodem $A[a_1,a_2,a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{u}(s_1,s_2,s_3)$: $p(t) = [a_1 + t \cdot s_1\ ,\ a_2 + t \cdot s_2\ ,\ a_3 + t \cdot s_3]$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad: Parabola (graf funkce $f(x) = x^2$): $k(t) = [t,t^2]$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad

- Nakreslete křivku zadanou parametricky:

$$k(t) = \left[2t^2\ ,\ (t-2)^2(t+2)\right],\quad t \in \langle -3,3 \rangle.$$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	18	8	2	0	2	8	18
y	-25	0	9	8	3	0	5

- Určete, ve kterých bodech protíná křivka $k(t)$ osy x a y.

  Řešíme rovnice

průsečík s y	...	$x(t) = 0$	...	$2t^2 = 0$
průsečík s x	...	$y(t) = 0$	...	$(t-2)^2(t+2) = 0$

Tečna parametricky zadané křivky

- Tečný vektor křivky $k(t) = [x(t),y(t)]$, $t \in I$ v bodě $t_0 \in I$:

$$u(t_0) = (x'(t_0),y'(t_0)).$$

- Tečný vektor křivky $k(t) = [x(t),y(t)]$, $t \in I$ v obecném bodě $t \in I$:

$$u(t) = (x'(t),y'(t)).$$

- Tečný vektor prostorové křivky $\ell(t) = [x(t),y(t),z(t)]$, $t \in I$ v obecném bodě $t \in I$:

$$v(t) = (x'(t),y'(t),z'(t)).$$

- Tečna křivky $k(t)$ v bodě $k(t_0)$ je dána vektorovou rovnicí (X je bod tečny):

$$X = k(t_0) + s \cdot u(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Příklad – pokračování

Je dána křivka

$$k(t) = [2t^2,(t-2)^2(t+2)],\ t \in \mathbb{R}.$$

- Určete body, ve kterých jsou tečny křivky $k(t)$ rovnoběžné s osami x a y, napište obecné rovnice těchto tečen.

  Tečný vektor křivky k v obecném bodě:

$$u(t) = \left(4t\ ,\ 3t^2 - 4t - 4\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

  Řešíme rovnice

tečna $\parallel$ s y	...	$x'(t) = 0$	...	$4t = 0$
tečna $\parallel$ s x	...	$y'(t) = 0$	...	$3t^2 - 4t - 4 = 0$

- Napište obecné rovnice tečen křivky $k(t)$ v uzlovém bodě $[8,0]$.

Parametrický popis kružnice

Implicitní rovnice kružnice se středem $[0{,}0]$ a poloměrem r

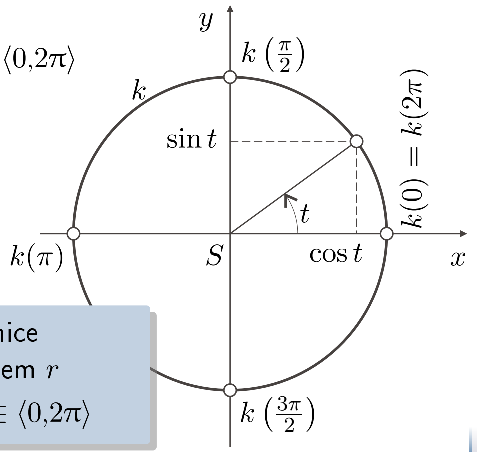
$$x^2+y^2-r^2=0.$$

Jednotková kružnice:

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & + & y^2 & = & 1 \\ (\cos t)^2 & + & (\sin t)^2 & = & 1,\ t\in\langle 0{,}2\pi) \end{array}$$

Parametrický popis jednotkové kružnice:

$k(t)=[\cos t,\sin t]$, $t\in\langle 0{,}2\pi)$



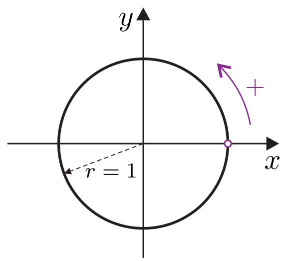
Parametrický popis kružnice se středem $[0{,}0]$ a poloměrem r

$$k(t)=[r\cdot\cos t\ ,\ r\cdot\sin t],\ t\in\langle 0{,}2\pi)$$

Parametrický popis kružnice

Parametr t je **orientovaný úhel**. Jak se změní pohyb bodu $k(t)$ po kružnici, když změníme orientaci t?

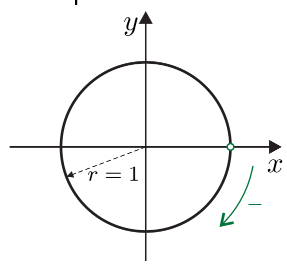
kladná orientace



$$\begin{aligned} k(t) &= [\ \cos(+t),\ \ \sin(+t)\ ] \\ &= [\ \cos t,\ \ \sin t\ ] \end{aligned}$$

$k(t)=[\cos t,\ \sin t]$, $t\in\langle 0{,}2\pi)$

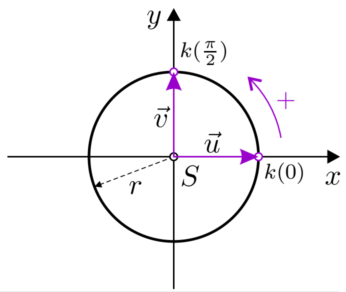
záporná orientace



$$\begin{aligned} k(t) &= [\ \cos(-t),\ \ \sin(-t)\ ] \\ &= [\ \cos t,\ \ -\sin t\ ] \end{aligned}$$

$k(t)=[\cos t,\ -\sin t]$, $t\in\langle 0{,}2\pi)$

Parametrický popis kružnice

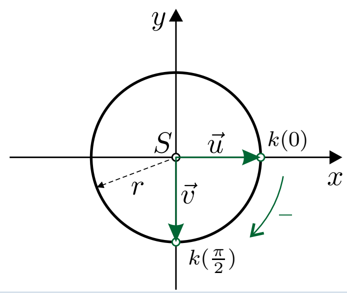


$k(t)=[r\cos t,\ r\sin t]$, $t\in\langle 0{,}2\pi)$

$k(0)=[r{,}0]=S+\vec u$

$k(\frac{\pi}{2})=[0{,}r]=S+\vec v$

$\vec u=(r{,}0)$, $\vec v=(0{,}r)$



$k(t)=[r\cos t,\ -r\sin t]$, $t\in\langle 0{,}2\pi)$

$k(0)=[r{,}0]=S+\vec u$

$k(\frac{\pi}{2})=[0,-r]=S+\vec v$

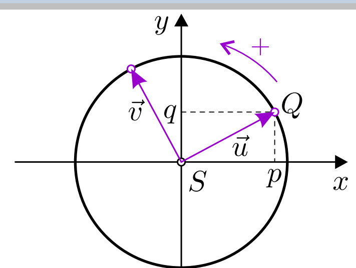
$\vec u=(r{,}0)$, $\vec v=(0,-r)$

$$k(t)=S+\vec u\cdot\cos t+\vec v\cdot\sin t$$

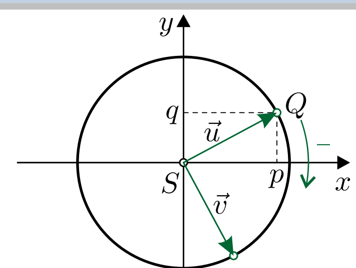
$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}\cdot\cos t+\begin{pmatrix}0\\r\end{pmatrix}\cdot\sin t \qquad \begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}\cdot\cos t+\begin{pmatrix}0\\-r\end{pmatrix}\cdot\sin t$$

Parametrický popis kružnice

Kružnice k je dána středem $S[0{,}0]$ a bodem $Q[p{,}q]$.



$\vec u=(p{,}q)$, $\vec v=(-q{,}p)$



$\vec u=(p{,}q)$, $\vec v=(q,-p)$

$$k(t)=S+\vec u\cdot\cos t+\vec v\cdot\sin t$$

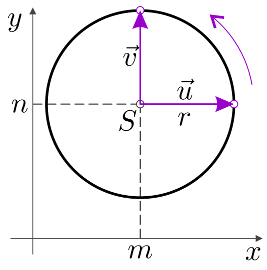
$$\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\cdot\cos t+\begin{pmatrix}-q\\p\end{pmatrix}\cdot\sin t \qquad \begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}\cdot\cos t+\begin{pmatrix}q\\-p\end{pmatrix}\cdot\sin t$$

$k(t)=[p\cos t-q\sin t, q\cos t+p\sin t]$, $t\in\langle 0{,}2\pi)$

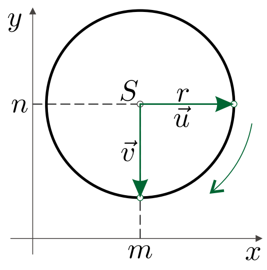
$k(t)=[p\cos t+q\sin t, q\cos t-p\sin t]$, $t\in\langle 0{,}2\pi)$

Parametrický popis kružnice

Kružnice je dána středem $S[m,n]$ a poloměrem r.



$\vec{u} = (r,0)$, $\vec{v} = (0,r)$



$\vec{u} = (r,0)$, $\vec{v} = (0,-r)$

$$k(t) = S + \vec{u} \cdot \cos t + \vec{v} \cdot \sin t$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \cdot \sin t$$

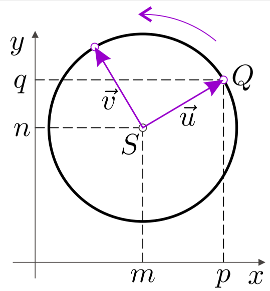
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} \cdot \sin t$$

$$k(t) = [m + r\cos t\ ,\ n + r\sin t],\quad t \in \langle 0,2\pi \rangle$$

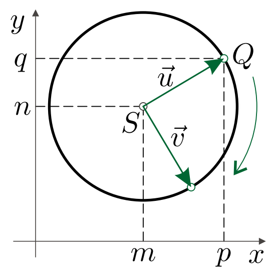
$$k(t) = [m + r\cos t\ ,\ n - r\sin t],\quad t \in \langle 0,2\pi \rangle$$

Parametrický popis kružnice

Kružnice k je určena středem $S[m,n]$ a bodem $Q[p,q]$.



$\vec{u} = (p-m\ ,\ q-n)$
$\vec{v} = (-(q-n)\ ,\ p-m)$



$\vec{u} = (p-m\ ,\ q-n)$
$\vec{v} = (q-n\ ,\ -(p-m))$

$$k(t) = S + \vec{u} \cdot \cos t + \vec{v} \cdot \sin t$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} p-m \\ q-n \end{pmatrix} \cdot \cos t + \begin{pmatrix} -(q-n) \\ p-m \end{pmatrix} \cdot \sin t$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} p-m \\ q-n \end{pmatrix} \cdot \cos t + \begin{pmatrix} q-n \\ -(p-m) \end{pmatrix} \cdot \sin t$$

$$\begin{aligned} k(t) = [&m + (p-m)\cos t - (q-n)\sin t, \\ &n + (q-n)\cos t + (p-m)\sin t\ ], \\ &t \in \langle 0,2\pi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k(t) = [&m + (p-m)\cos t + (q-n)\sin t, \\ &n + (q-n)\cos t - (p-m)\sin t\ ], \\ &t \in \langle 0,2\pi \rangle \end{aligned}$$

Parametrický popis elipsy

Implicitní rovnice elipsy se středem $S[0{,}0]$, hlavní poloosou a, vedlejší poloosou b, hlavní osa je osa x.

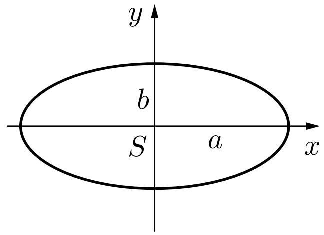
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

$$(\cos t)^2+(\sin t)^2=1,\ t\in\langle 0{,}2\pi)$$

$$\frac{x}{a}=\cos t \qquad \frac{y}{b}=\sin t$$

$$x=a\cdot\cos t \qquad y=b\cdot\sin t$$



Parametrický popis celé elipsy:

$k(t)=[a\cdot\cos t\ ,\ b\cdot\sin t],\ t\in\langle 0{,}2\pi)$

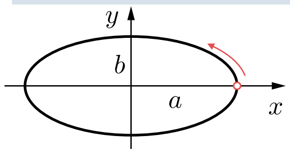
Parametrický popis elipsy

Parametrický popis elipsy s využitím goniometrických funkcí vychází z trojúhelníčkové konstrukce elipsy.

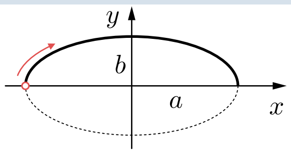
- Elipsa se středem $S[0{,}0]$, hlavní poloosou a (hl. osa $\|x$) a vedlejší poloosou b:
$$k(t)=[a\cdot\cos t\ ;\ b\cdot\sin t]\,,\quad t\in\langle 0{,}2\pi)$$
- Elipsa se středem $S[m{,}n]$, hlavní poloosou a (hl. osa $\|x$) a vedlejší poloosou b:
$$k(t)=[m+a\cdot\cos t\ ;\ n+b\cdot\sin t]\,,\quad t\in\langle 0{,}2\pi)$$
- Vždy budeme pracovat s elipsami, jejichž osy leží na přímkách rovnoběžných se souřadnicovými osami a počáteční body parametrizace budeme volit ve vrcholech elipsy.
- Obdobně jako u kružnice, lze elipsu popsat různými způsoby
$k(t)=[a\cdot\sin t\ ;\ b\cdot\cos t],\ t\in\langle 0{,}2\pi)$
$k(t)=[-a\cdot\cos t\ ;\ -b\cdot\sin t],\ t\in\langle 0{,}2\pi)$
$\vdots$

Parametrický popis elipsy

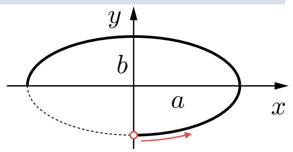
Elipsa se středem v bodě $[0{,}0]$, velikostí hl. poloosy a a vedl. poloosy b.



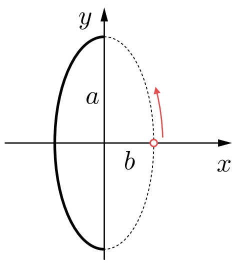
$k(t)=[a\cos t\ ;\ b\sin t]$
$t\in\langle 0{,}2\pi)$



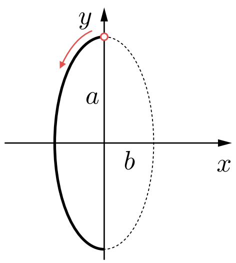
$k(t)=[-a\cos t\ ;\ b\sin t]$
$t\in\langle 0\ ;\ \pi\rangle$



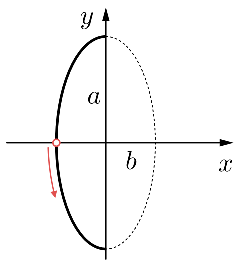
$k(t)=[a\sin t\ ;\ -b\cos t]$
$t\in\left\langle 0\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$



$k(t)=[b\cos t\ ;\ a\sin t]$
$t\in\left\langle \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$



$k(t)=[-b\sin t\ ;\ a\cos t]$
$t\in\langle 0\ ;\ \pi\rangle$



$k(t)=[-b\cos t\ ;\ -a\sin t]$
$t\in\left\langle -\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$

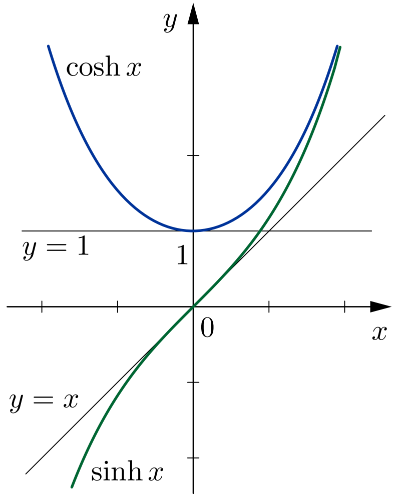
Hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$
$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$\sinh x < \cosh x$
pro všechna $x \in \mathbb{R}$

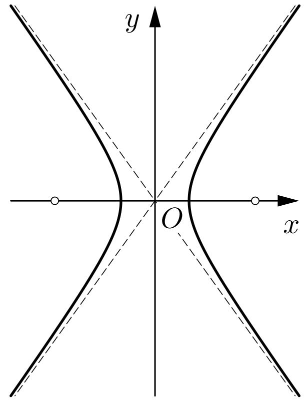


Parametrický popis hyperboly

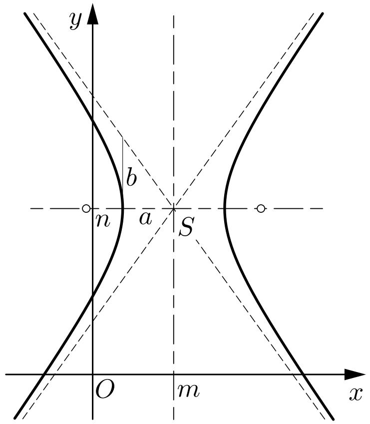
Implicitní rovnice hyperboly se středem $S[0,0]$,
hlavní poloosou a, vedlejší poloosou b, hlavní osa je osa x.
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$
$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1,\ t \in \mathbb{R}$$
$$\frac{x}{a} = \cosh t \qquad \frac{y}{b} = \sinh t$$
$$x = a \cdot \cosh t \qquad y = b \cdot \sinh t$$

Parametrický popis obou větví hyperboly:
$k(t) = [\pm\ a \cdot \cosh t\ ,\ b \cdot \sinh t],\ t \in \mathbb{R}$

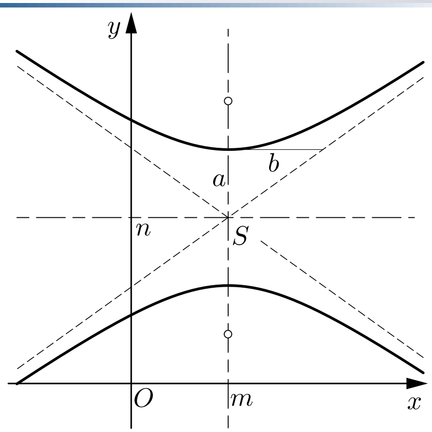


Parametrický popis hyperboly



$$\left(\frac{x-m}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-n}{b}\right)^2 = 1$$

$k(t) = [m \pm a\cosh t\ ,\ n + b\sinh t]$
$t \in \mathbb{R}$



$$-\left(\frac{x-m}{b}\right)^2 + \left(\frac{y-n}{a}\right)^2 = 1$$

$k(t) = [m + b\sinh t\ ,\ n \pm a\cosh t]$
$t \in \mathbb{R}$

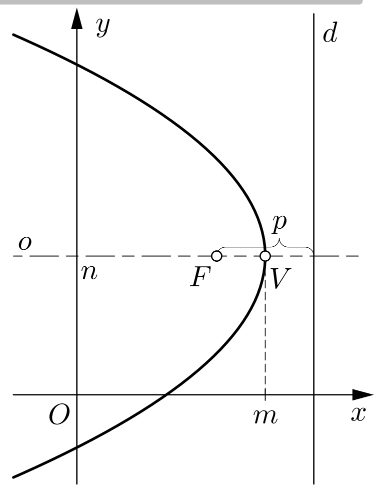
Parametrický popis paraboly

Implicitní rovnice paraboly s vrcholem $V[m,n]$,
parametrem p, $o \| x$, vrchol nalevo od řídící přímky d.
$$(y-n)^2 = -2p(x-m).$$

- Zvolíme parametr: $t = y - n$
- Vyjádříme y: $y = n + t$
- Dosadíme t do rovnice paraboly a vyjádříme x:

$$t^2 = -2p(x-m)$$
$$-\frac{t^2}{2p} = x - m$$
$$x = m - \frac{t^2}{2p}$$

Parametrický popis paraboly:
$$k(t) = \left[m - \frac{t^2}{2p}\ ,\ n + t\right],\ t \in \mathbb{R}$$



Příklady

1. Kružnice je dána středem $S[3{,}5]$ a bodem $Q[2{,}1]$.
   Napište parametrický popis kružnice. Počáteční bod parametrizace nechť je bod Q, orientace kladná.
2. Elipsa má střed $S[3{,}0]$, velikosti poloos $a = 5$, $b = 3$, hlavní osa je rovnoběžná s osou y.
   Napište parametrický popis elipsy, napište souřadnice ohnisek elipsy.
3. Hyperbola má střed $S[0{,}4]$, velikosti poloos $a = 2$, $b = 3$, hlavní osa je rovnoběžná s osou y.
   Napište parametrický popis hyperboly, spočítejte souřadnice jejích průsečíků s osami x a y.
4. Parabola má řídící přímku $d: \ x = 2$ a ohnisko $F[4{,}2]$.
   Napište parametrické vyjádření paraboly.

Řešení

1. $k(t) = [3 - \cos t + 4\sin t \ ; \ 5 - 4\cos t - \sin t]$, $t \in \langle 0{,}2\pi \rangle$
2. $k(t) = [3 + 3\cos t \ ; \ 5\sin t]$, $t \in \langle 0{,}2\pi \rangle$
   $E = [3 \, ; \, 4]$, $F = [3 \, ; \, -4]$
3. $k(t) = [3\sinh t \ ; \ 4 \pm 2\cosh t]$, $t \in \mathbb{R}$
   $P_1^x = [-3\sqrt{3} \, ; \, 0]$, $P_2^x = [3\sqrt{3} \, ; \, 0]$, $P_1^y = [0 \, ; \, 2]$, $P_2^y = [0 \, ; \, 6]$
4. $k(t) = \left[3 + \dfrac{t^2}{4} \ ; \ 2 + t\right]$, $t \in \mathbb{R}$