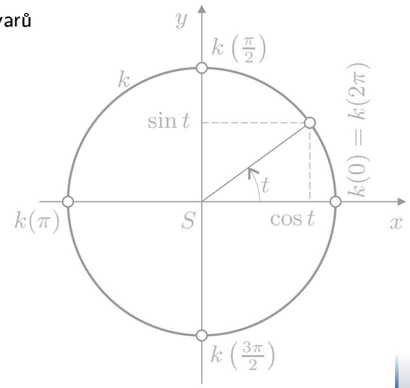
Matematika I

6. PŘEDNÁŠKA 6. 4. 2018



Předpokládané znalosti

- kartézská soustava souřadnic
- vektory
  - operace s vektory (sčítání, násobení konstantou, skalární součin, vektorový součin)
  - lineární závislost $\times$ nezávislost vektorů
  - velikost vektoru, odchylka vektorů
- přímka v rovině a v prostoru
  - vektorová rovnice a parametrické rovnice přímky v rovině a v prostoru
  - obecná rovnice přímky v rovině
  - rovnice přímky ve směrnicovém tvaru
- rovina v prostoru
  - vektorová rovnice a parametrické rovnice roviny v prostoru
  - obecná rovnice roviny

Předpokládané znalosti

- analytický popis kuželoseček
  - rovnice kuželoseček v obecném a středovém (vrcholovém) tvaru
  - odvození rovnice kuželosečky ze zadaných prvků
  - odvození parametrů kuželosečky z rovnice (souřadnice vrcholů, ohnisek, velikosti poloos, . . .)
  - rovnice tečny (v bodě, z bodu, daného směru)

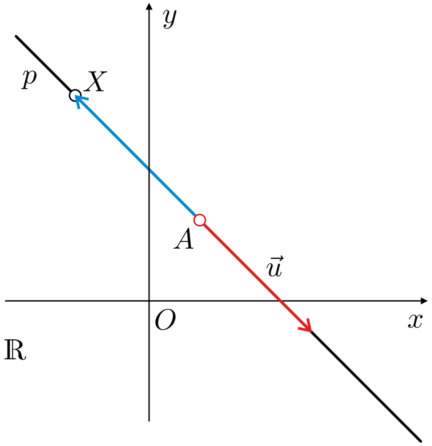
Přímka v rovině

Přímka p je určena bodem $A[a_1,a_2]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{u}(u_1,u_2)$.

- Každý bod $X[x,y]$ přímky p lze popsat pomocí vektorové rovnice
  $X = A + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$
- Rozpisem do souřadnic získáme parametrické rovnice přímky p.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

$$p: \begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2, \ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

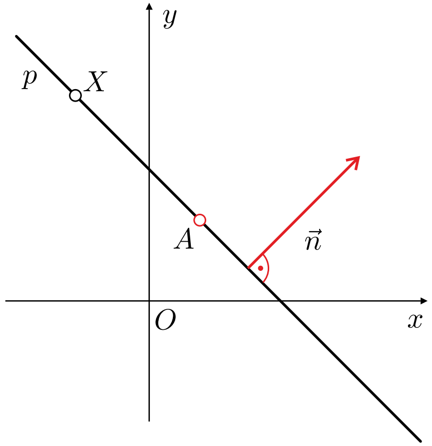


Přímka v rovině

Matematický popis základních geometrických útvarů

Přímka p je určena bodem $A[a_1,a_2]$ a nenulovým normálovým vektorem $\vec{n}(a,b)$.

- Souřadnice libovolného bodu $X[x,y]$ přímky p vyhovují obecné rovnici přímky
  $p: a \cdot x + b \cdot y + c = 0,$
  $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}.$



Přímka v rovině

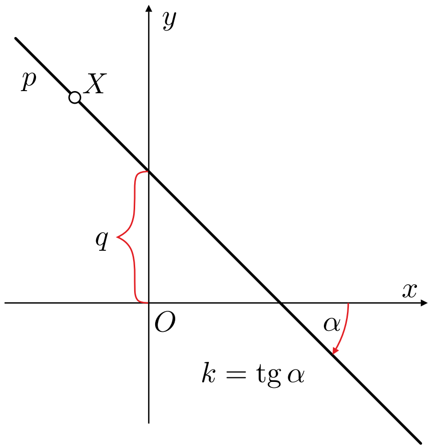
Matematický popis základních geometrických útvarů

Přímka p je určena směrnicí $k \in \mathbb{R}$ a posunutím $q \in \mathbb{R}$.

- Přímka p je popsána jako graf lineární funkce.
- Souřadnice libovolného bodu $X[x,y]$ přímky p vyhovují rovnici přímky ve směrnicovém tvaru

$$p: y = k \cdot x + q.$$

- Tímto způsobem nelze popsat přímky rovnoběžné s osou y.



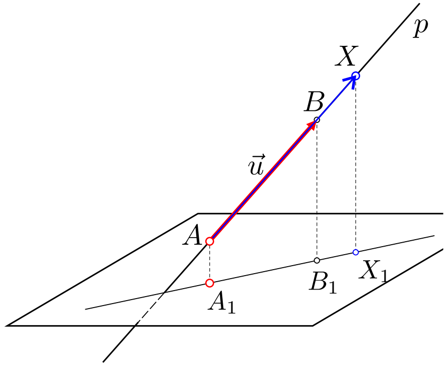
Přímka v prostoru

Matematický popis základních geometrických útvarů

Přímka p je určena bodem $A[a_1,a_2,a_3]$ a nenulovým směrovým vektorem $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$.

- Každý bod $X[x,y,z]$ přímky p lze popsat pomocí vektorové rovnice
  $X = A + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$
- Rozpisem do souřadnic získáme parametrické rovnice přímky p.

$$p: \begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2, \\ z &= a_3 + t \cdot u_3, \ t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Přímku v prostoru nelze popsat jednou rovnicí!

Rovina

Rovina ϱ je určena bodem $A[a_1,a_2,a_3]$ a dvěma nenulovými lineárně nezávislými směrovými vektory $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ a $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$.

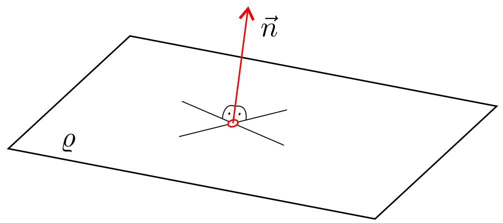
- Každý bod $X[x,y,z]$ roviny ϱ lze popsat pomocí vektorové rovnice
$$X = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v},\ t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}.$$
- Rozpisem do souřadnic získáme parametrické rovnice roviny ϱ.

$$\begin{aligned} \varrho:\ x &= a_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2, \\ z &= a_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3, \\ & t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Rovina

Rovina ϱ je určena bodem $A[a_1,a_2,a_3]$ a nenulovým normálovým vektorem $\vec{n}(a,b,c)$.

- Souřadnice libovolného bodu $X[x,y,z]$ roviny ϱ vyhovují obecné rovnici roviny ϱ
$$\varrho : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0,$$
$$a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ d \in \mathbb{R}.$$



Obecná rovnice kuželosečky

$$A \cdot x^2 + B \cdot x \cdot y + C \cdot y^2 + D \cdot x + E \cdot y + F = 0,$$
$$\{A,B,C,D,E,F\} \subset \mathbb{R} \quad \{A,B,C\} \neq \{0,0,0\}$$

Takovou rovnicí lze popsat:

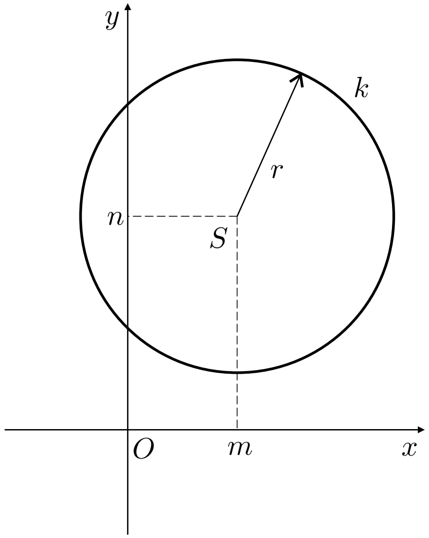
- kružnici,
- elipsu,
- parabolu,
- hyperbolu,
- dvě různoběžné přímky,
- dvě různé rovnoběžné přímky,
- jednu (dvojnásobnou) přímku,
- bod,
- prázdnou množinu.

Kružnice

Matematický popis základních geometrických útvarů

Rovnice kružnice ve středovém tvaru

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$$

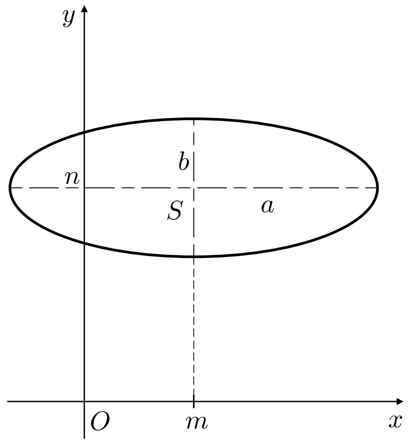


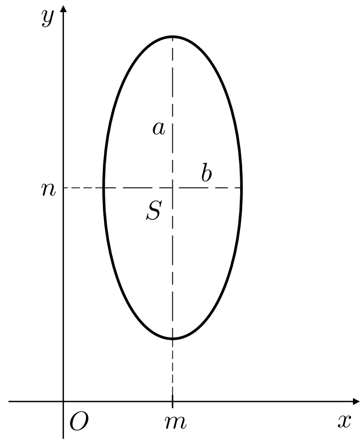
Elipsa

Matematický popis základních geometrických útvarů

Rovnice elipsy ve středovém tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$



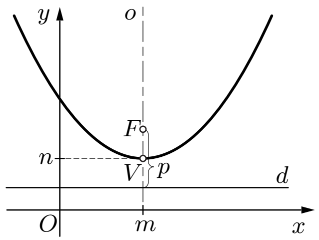


Parabola

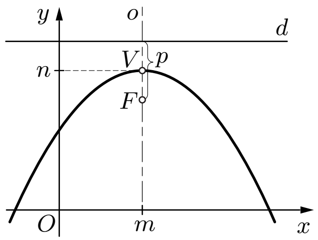
Matematický popis základních geometrických útvarů

Rovnice paraboly ve vrcholovém tvaru

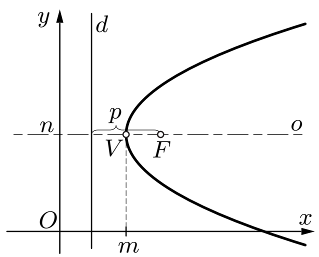
$$(x-m)^2 = 2p(y-n)$$



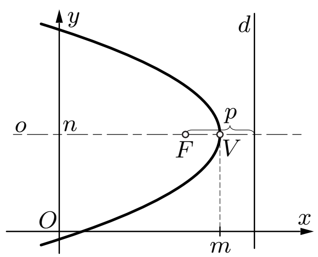
$$(x-m)^2 = -2p(y-n)$$



$$(y-n)^2 = 2p(x-m)$$



$$(y-n)^2 = -2p(x-m)$$

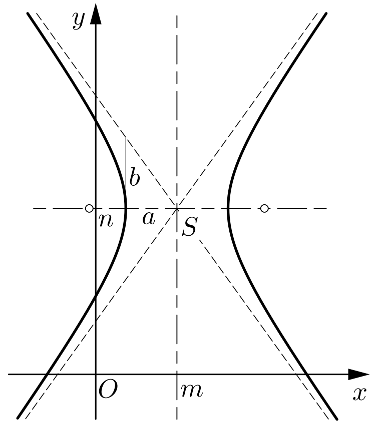


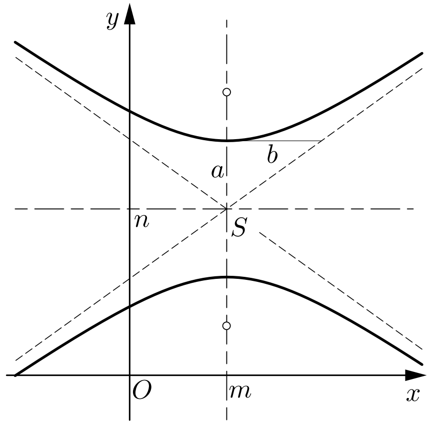
Hyperbola

Matematický popis základních geometrických útvarů

Rovnice hyperboly ve středovém tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{(y-n)^2}{a^2} - \frac{(x-m)^2}{b^2} = 1$$





Způsoby popisu křivek

Graf funkce f jako rovinná křivka.

$$\{[x,f(x)] \in \mathbb{R}^2,\ x \in \mathcal{D}_f\}$$

Příklad: Graf funkce $f(x) = x^2$ je parabola v rovině $\mathbb{R}^2$.

Implicitně zadané křivky v rovině $\mathbb{R}^2$.

$$\{[x,y] \in \mathbb{R}^2,\ F(x,y) = 0\}$$

Příklad: Kružnice o středu $[0,0]$ a poloměru r: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$.

Křivky dané parametricky.

křivka $k(t)$ v $\mathbb{R}^2$: $\{[x(t),y(t)]\}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$

křivka $k(t)$ v $\mathbb{R}^3$: $\{[x(t),y(t),z(t)]\}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$

Příklad: Přímka p určená bodem $A[a_1,a_2,a_3]$ a směrovým vektorem $\vec{u}(s_1,s_2,s_3)$: $p(t) = [a_1 + t \cdot s_1\ ,\ a_2 + t \cdot s_2\ ,\ a_3 + t \cdot s_3]$, $t \in \mathbb{R}$.

Příklad: Parabola (graf funkce $f(x) = x^2$): $k(t) = [t,t^2]$, $t \in \mathbb{R}$.

Tečna parametricky zadané křivky

- Tečný vektor křivky $k(t) = [x(t),y(t)]$, $t \in I$ v bodě $t_0 \in I$:

$$u(t_0) = (x'(t_0),y'(t_0)).$$

- Tečný vektor křivky $k(t) = [x(t),y(t)]$, $t \in I$ v obecném bodě $t \in I$:

$$u(t) = (x'(t),y'(t)).$$

- Tečný vektor prostorové křivky $\ell(t) = [x(t),y(t),z(t)]$, $t \in I$ v obecném bodě $t \in I$:

$$v(t) = (x'(t),y'(t),z'(t)).$$

- Tečna křivky $k(t)$ v bodě $k(t_0)$ je dána vektorovou rovnicí (X je bod tečny):

$$X = k(t_0) + s \cdot u(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Příklad

- Nakreslete křivku zadanou parametricky:

$$k(t) = \left[2t^2\ ,\ (t-2)^2(t+2)\right], \quad t \in \langle -3,3 \rangle.$$

t	-3	-2	-1	0	1	2	3
x	18	8	2	0	2	8	18
y	-25	0	9	8	3	0	5

Parametrický popis kružnice

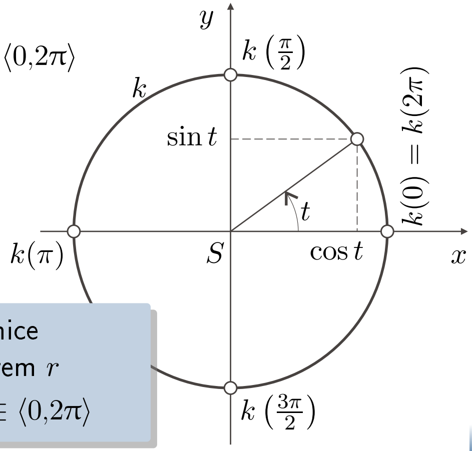
Implicitní rovnice kružnice se středem $[0,0]$ a poloměrem r
$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Jednotková kružnice:

$$\begin{aligned} x^2 &+ y^2 &= 1 \\ (\cos t)^2 &+ (\sin t)^2 &= 1,\ t \in \langle 0,2\pi) \end{aligned}$$

Parametrický popis jednotkové kružnice:

$k(t) = [\cos t, \sin t],\ t \in \langle 0,2\pi)$



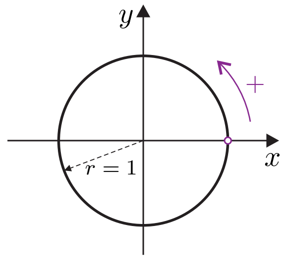
Parametrický popis kružnice se středem $[0,0]$ a poloměrem r

$$k(t) = [r \cdot \cos t\ ,\ r \cdot \sin t],\ t \in \langle 0,2\pi)$$

Parametrický popis kružnice

Parametr t je **orientovaný úhel**. Jak se změní pohyb bodu $k(t)$ po kružnici, když změníme orientaci t?

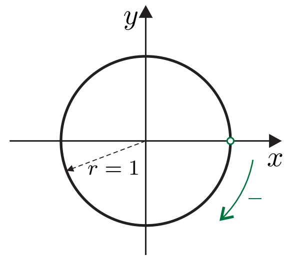
kladná orientace



$$\begin{aligned} k(t) &= [\ \cos(+t),\ \sin(+t)\ ] \\ &= [\ \cos t,\ \sin t\ ] \end{aligned}$$

$k(t) = [\cos t,\ \sin t],\ t \in \langle 0,2\pi)$

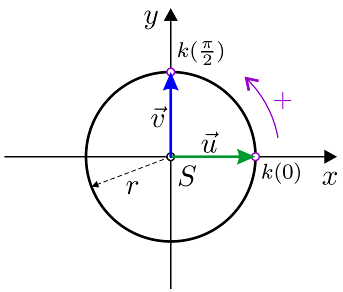
záporná orientace



$$\begin{aligned} k(t) &= [\ \cos(-t),\ \sin(-t)\ ] \\ &= [\ \cos t,\ -\sin t\ ] \end{aligned}$$

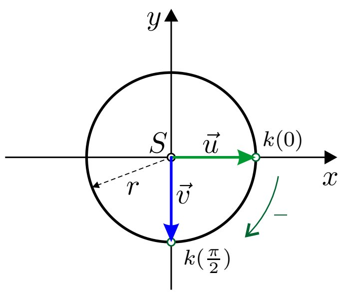
$k(t) = [\cos t,\ -\sin t],\ t \in \langle 0,2\pi)$

Parametrický popis kružnice



$k(t) = [r\cos t,\ r\sin t],\ t \in \langle 0,2\pi)$

$k(0) = [r,0] = S + \vec{u}$
$k(\frac{\pi}{2}) = [0,r] = S + \vec{v}$
$\vec{u} = (r,0),\ \vec{v} = (0,r)$



$k(t) = [r\cos t,\ -r\sin t],\ t \in \langle 0,2\pi)$

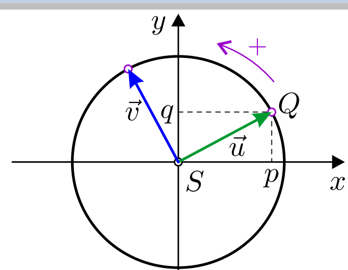
$k(0) = [r,0] = S + \vec{u}$
$k(\frac{\pi}{2}) = [0,-r] = S + \vec{v}$
$\vec{u} = (r,0),\ \vec{v} = (0,-r)$

$$k(t) = S + \vec{u} \cdot \cos t + \vec{v} \cdot \sin t$$

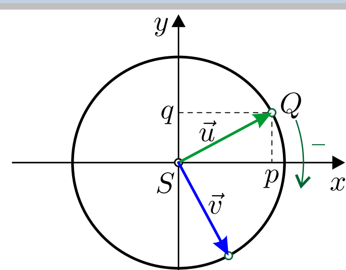
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \cdot \sin t \qquad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix} \cdot \sin t$$

Parametrický popis kružnice

Kružnice k je dána středem $S[0,0]$ a bodem $Q[p,q]$.



$\vec{u} = (p,q),\ \vec{v} = (-q,p)$



$\vec{u} = (p,q),\ \vec{v} = (q,-p)$

$$k(t) = S + \vec{u} \cdot \cos t + \vec{v} \cdot \sin t$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \cos t + \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \cdot \sin t$$

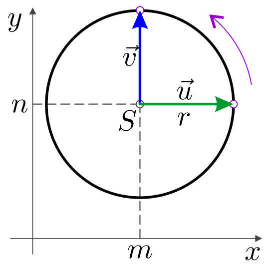
$k(t) = [p\cos t - q\sin t,\ q\cos t + p\sin t],\ t \in \langle 0,2\pi)$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \cdot \cos t + \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix} \cdot \sin t$$

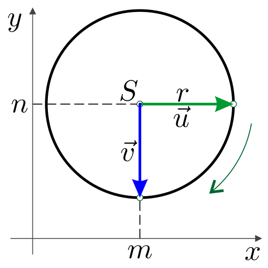
$k(t) = [p\cos t + q\sin t,\ q\cos t - p\sin t],\ t \in \langle 0,2\pi)$

Parametrický popis kružnice

Kružnice je dána středem $S[m,n]$ a poloměrem r.



$\vec{u} = (r,0)$, $\vec{v} = (0,r)$



$\vec{u} = (r,0)$, $\vec{v} = (0,-r)$

$$k(t) = S + \vec{u}\cdot\cos t + \vec{v}\cdot\sin t$$

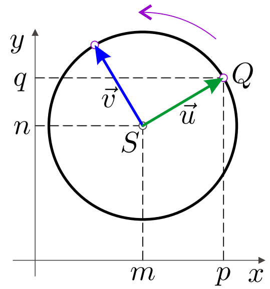
$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}\cdot\sin t \qquad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\cos t + \begin{pmatrix} 0 \\ -r \end{pmatrix}\cdot\sin t$$

$k(t) = [m + r\cos t\ ,\ n + r\sin t]$, $t \in \langle 0,2\pi\rangle$

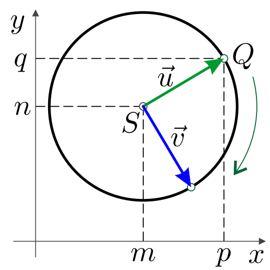
$k(t) = [m + r\cos t\ ,\ n - r\sin t]$, $t \in \langle 0,2\pi\rangle$

Parametrický popis kružnice

Kružnice k je určena středem $S[m,n]$ a bodem $Q[p,q]$.



$\vec{u} = (p-m\ ,\ q-n)$
$\vec{v} = (-(q-n)\ ,\ p-m)$



$\vec{u} = (p-m\ ,\ q-n)$
$\vec{v} = (q-n\ ,\ -(p-m))$

$$k(t) = S + \vec{u}\cdot\cos t + \vec{v}\cdot\sin t$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} p-m \\ q-n \end{pmatrix}\cdot\cos t + \begin{pmatrix} -(q-n) \\ p-m \end{pmatrix}\cdot\sin t \qquad \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} p-m \\ q-n \end{pmatrix}\cdot\cos t + \begin{pmatrix} q-n \\ -(p-m) \end{pmatrix}\cdot\sin t$$

$k(t) = [m + (p-m)\cos t - (q-n)\sin t,$
$n + (q-n)\cos t + (p-m)\sin t\ ],$
$t \in \langle 0,2\pi\rangle$

$k(t) = [m + (p-m)\cos t + (q-n)\sin t,$
$n + (q-n)\cos t - (p-m)\sin t\ ],$
$t \in \langle 0,2\pi\rangle$

Parametrický popis elipsy

Parametrický popis elipsy s využitím goniometrických funkcí vychází z trojúhelníčkové konstrukce elipsy.

- Elipsa se středem $S[0,0]$, hlavní poloosou a (hl. osa $\| x$) a vedlejší poloosou b:
  $$k(t) = [a\cdot\cos t\ ;\ b\cdot\sin t]\,,\quad t \in \langle 0,2\pi\rangle$$
- Elipsa se středem $S[m,n]$, hlavní poloosou a (hl. osa $\| x$) a vedlejší poloosou b:
  $$k(t) = [m + a\cdot\cos t\ ;\ n + b\cdot\sin t]\,,\quad t \in \langle 0,2\pi\rangle$$
- Vždy budeme pracovat s elipsami, jejichž osy leží na přímkách rovnoběžných se souřadnicovými osami a počáteční body parametrizace budeme volit ve vrcholech elipsy.
- Obdobně jako u kružnice, lze elipsu popsat různými způsoby
  $k(t) = [a\cdot\sin t\ ;\ b\cdot\cos t]$, $t \in \langle 0,2\pi\rangle$
  $k(t) = [-a\cdot\cos t\ ;\ -b\cdot\sin t]$, $t \in \langle 0,2\pi\rangle$
  $\vdots$

Parametrický popis elipsy

Implicitní rovnice elipsy se středem $S[0,0]$, hlavní poloosou a, vedlejší poloosou b, hlavní osa je osa x.

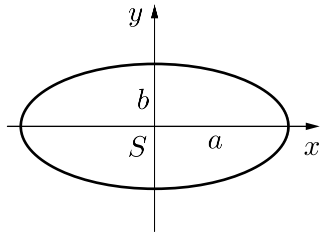
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$(\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1,\ t \in \langle 0,2\pi)$$

$$\frac{x}{a} = \cos t \qquad \frac{y}{b} = \sin t$$

$$x = a \cdot \cos t \qquad y = b \cdot \sin t$$



Parametrický popis celé elipsy:

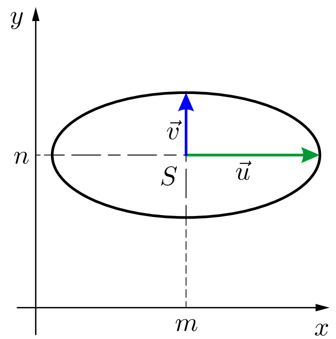
$k(t) = [a \cdot \cos t\ ,\ b \cdot \sin t],\ t \in \langle 0,2\pi)$

Parametrický popis elipsy

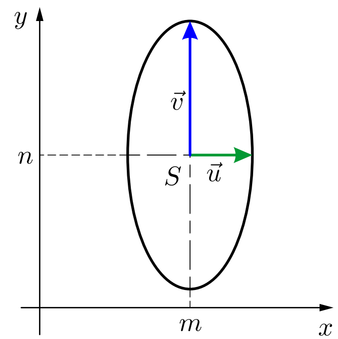
Také pro parametrický popis elipsy lze využít dvou kolmých vektorů. Kružnici se středem S, velikostí hl. poloosy a a vedl. poloosy b lze popsat:

$$k(t) = S + \vec{u}\cos(t) + \vec{v}\sin(t),\ t \in \langle 0,2\pi)$$

$\vec{u} = (a,0) \quad \vec{v} = (0,b)$

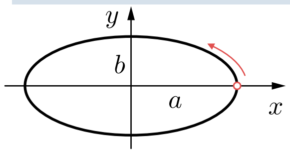


$\vec{u} = (b,0) \quad \vec{v} = (0,a)$

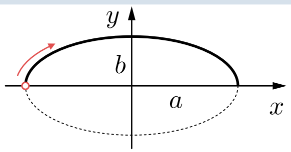


Parametrický popis elipsy

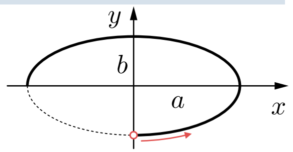
Elipsa se středem v bodě $[0,0]$, velikostí hl. poloosy a a vedl. poloosy b.



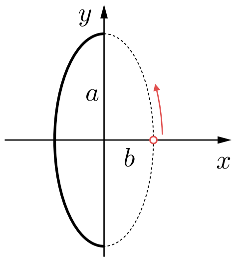
$k(t) = [a\cos t\ ;\ b\sin t]$
$t \in \langle 0,2\pi)$



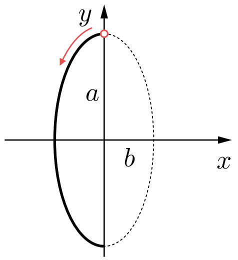
$k(t) = [-a\cos t\ ;\ b\sin t]$
$t \in \langle 0\ ;\ \pi)$



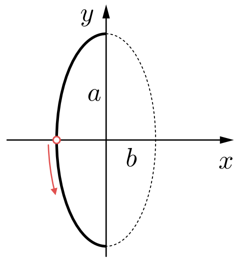
$k(t) = [a\sin t\ ;\ -b\cos t]$
$t \in \left\langle 0\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$



$k(t) = [b\cos t\ ;\ a\sin t]$
$t \in \left\langle \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$



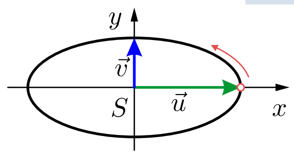
$k(t) = [-b\sin t\ ;\ a\cos t]$
$t \in \langle 0\ ;\ \pi)$



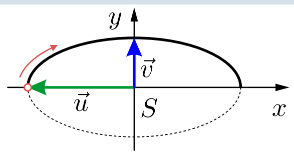
$k(t) = [-b\cos t\ ;\ -a\sin t]$
$t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Parametrický popis elipsy

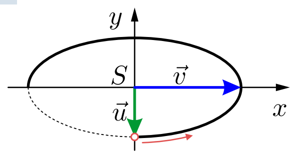
$$k(t) = S + \vec{u}\cos(t) + \vec{v}\sin(t)$$



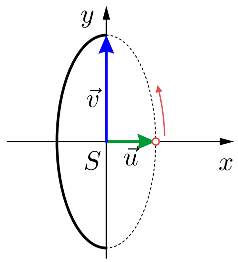
$\vec{u} = (a,0) \quad \vec{v} = (0,b)$
$t \in \langle 0,2\pi)$



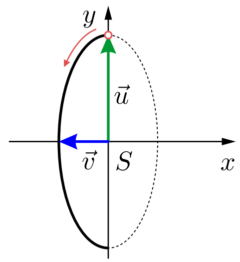
$\vec{u} = (-a,0) \quad \vec{v} = (0,b)$
$t \in \langle 0\ ;\ \pi)$



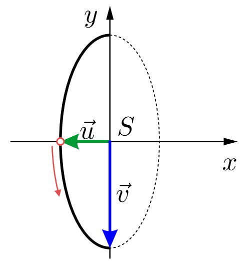
$\vec{u} = (0,-b) \quad \vec{v} = (a,0)$
$t \in \left\langle 0\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$



$\vec{u} = (b,0) \quad \vec{v} = (0,a)$
$t \in \left\langle \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right\rangle$



$\vec{u} = (0,a) \quad \vec{v} = (-b,0)$
$t \in \langle 0\ ;\ \pi)$



$\vec{u} = (-b,0) \quad \vec{v} = (0,-a)$
$t \in \left\langle -\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$

Příklady

1. Kružnice je dána středem $S[3\,;\,5]$ a bodem $Q[2\,;\,1]$.
   Napište parametrický popis kružnice. Počáteční bod parametrizace nechť je bod Q, orientace kladná.
2. Elipsa má střed $S[3\,;\,0]$, velikosti poloos $a = 5$, $b = 3$, hlavní osa je rovnoběžná s osou y.
   Napište parametrický popis elipsy, napište souřadnice ohnisek elipsy.
3. Kružnice leží v nárysně $\nu(x,z)$, má střed $S[5\,;\,0\,;\,0]$ a poloměr $r = 4$.
   Napište parametrický popis poloviny kružnice, která leží nad půdorysnou.
4. Kružnice leží v rovině α: $x = -4$, má střed $S[-4\,;\,0\,;\,5]$ a prochází bodem $Q[-4\,;\,3\,;\,-1]$.
   Napište parametrický popis kružnice.
5. Elipsa je dána ohnisky $E[-2\,;\,3\,;\,4]$, $F[6\,;\,3\,;\,4]$ a vrcholem $C[2\,;\,3\,;\,0]$.
   Napište parametrické vyjádření spodní poloviny elipsy. Napište souřadnice všech zbývajících vrcholů elipsy.

Řešení

1. $k(t) = [3 - \cos t + 4\sin t\ ;\ 5 - 4\cos t - \sin t]$, $t \in \langle 0{,}2\pi\rangle$
2. $k(t) = [3 + 3\cos t\ ;\ 5\sin t]$, $t \in \langle 0{,}2\pi\rangle$
   $E = [3\,;\,4]$, $F = [3\,;\,-4]$
3. $k(t) = [5 - 4\cos t\ ;\ 0\ ;\ 4\sin t]$, $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$
4. $k(t) = [-4\ ;\ 3\cos t + 6\sin t\ ;\ 5 - 6\cos t + 3\sin t]$, $t \in \langle 0{,}2\pi\rangle$
5. $k(t) = [\ 2 + 4\sqrt{2}\cos t\ ;\ 3\ ;\ 4 - 4\sin t]$, $t \in \langle 0\,;\,\pi\rangle$
   $A[2 + 4\sqrt{2}\,;\,3\,;\,4]$, $B[2 - 4\sqrt{2}\,;\,3\,;\,4]$, $D[2\,;\,3\,;\,8]$