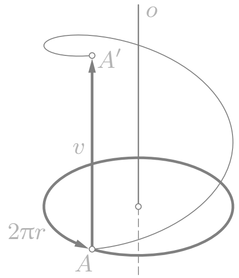
Matematika I

7. PŘEDNÁŠKA 13. 4. 2018



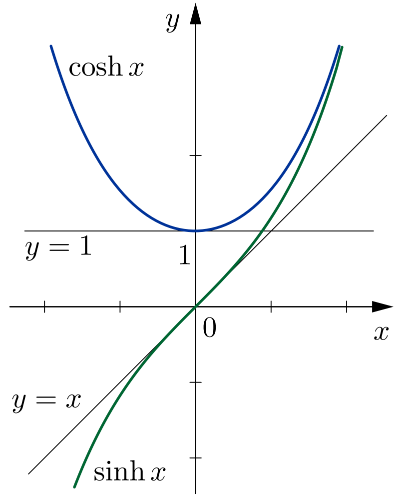
Hyperbolické funkce

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$
$$(\cosh x)' = \sinh x$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$\sinh x < \cosh x$
pro všechna $x \in \mathbb{R}$



Parametrický popis hyperboly

Implicitní rovnice hyperboly se středem $S[0,0]$,
hlavní poloosou a, vedlejší poloosou b, hlavní osa je osa x.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

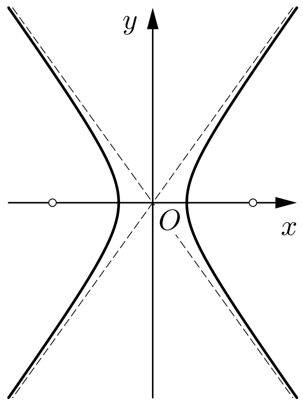
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$(\cosh t)^2 - (\sinh t)^2 = 1, \ t \in \mathbb{R}$$

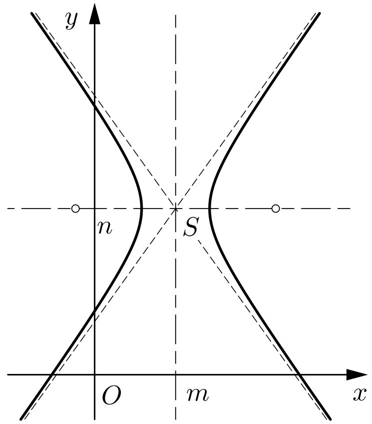
$$\frac{x}{a} = \cosh t \qquad \frac{y}{b} = \sinh t$$
$$x = a \cdot \cosh t \qquad y = b \cdot \sinh t$$

Parametrický popis <u>obou</u> větví hyperboly:

$k(t) = [\pm\ a \cdot \cosh t\ ,\ b \cdot \sinh t],\ t \in \mathbb{R}$

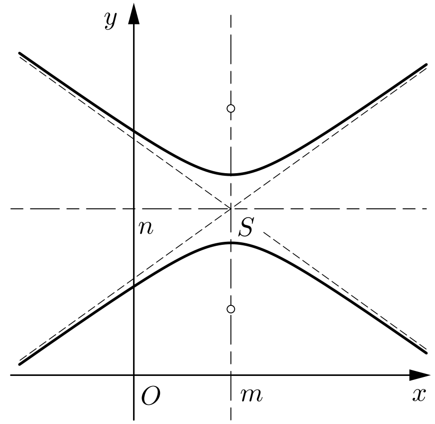


Parametrický popis hyperboly



$$\left(\frac{x-m}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-n}{b}\right)^2 = 1$$

$k(t) = [m \pm a\cosh t\ ,\ n + b\sinh t]$
$t \in \mathbb{R}$



$$-\left(\frac{x-m}{b}\right)^2 + \left(\frac{y-n}{a}\right)^2 = 1$$

$k(t) = [m + b\sinh t\ ,\ n \pm a\cosh t]$
$t \in \mathbb{R}$

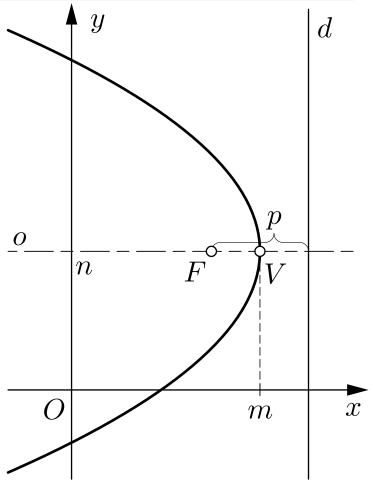
Parametrický popis paraboly

Implicitní rovnice paraboly s vrcholem $V[m,n]$, parametrem p, $o \| x$, vrchol nalevo od řídící přímky d.
$$(y-n)^2 = -2p(x-m).$$

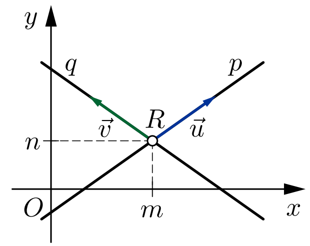
- Zvolíme parametr: $t = y - n$
- Vyjádříme y: $y = n + t$
- Dosadíme t do rovnice paraboly a vyjádříme x:

$$\begin{aligned} t^2 &= -2p(x-m) \\ -\frac{t^2}{2p} &= x - m \\ x &= m - \frac{t^2}{2p} \end{aligned}$$

Parametrický popis paraboly:
$$k(t) = \left[m - \frac{t^2}{2p}\ ,\ n + t\right],\ t \in \mathbb{R}$$



Singulární kuželosečky

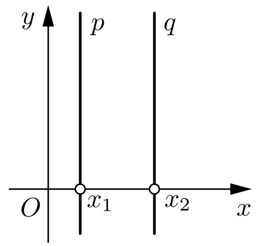


dvojice různoběžek

$\vec{u} = (a,b)$, $\vec{v} = (-a,b)$

$$\begin{aligned} p(t) &= [m + at\ ;\ n + bt] \\ q(t) &= [m - at\ ;\ n + bt] \\ & t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

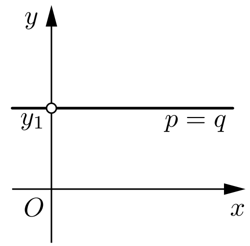
$$k(t) = [m \pm at\ ;\ n + bt],\quad t \in \mathbb{R}$$



dvojice rovnoběžek

$p \| q \| y$

$$\begin{aligned} p(t) &= [x_1\ ;\ t] \\ q(t) &= [x_2\ ;\ t] \\ & t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



dvojnásobná přímka

$p = q$, $p \| x$

$$p(t) = [t\ ;\ y_1],\quad t \in \mathbb{R}$$

Příklady

1 Hyperbola má střed $S\,[0\ ;\ 4]$, velikosti poloos $a = 2$, $b = 3$, hlavní osa je rovnoběžná s osou y.

- Napište parametrický popis hyperboly a jejích asymptot.
- Spočítejte souřadnice průsečíků hyperboly s osami x a y.

2 Parabola leží v rovině α: $y = -3$, její řídící přímka d je rovnoběžná s osou z a prochází bodem $[2\ ;\ -3\ ;\ 0]$, bod $F\,[4\ ;\ -3\ ;\ 2]$ je ohniskem paraboly.

- Napište parametrické vyjádření paraboly, její osy a řídící přímky.
- Určete souřadnice jejího průsečíku s půdorysnou $\pi(x,y)$.
- Napište parametrické vyjádření části paraboly, která leží nad půdorysnou.

3 Napište parametrický popis kuželoseček daných obecnou rovnicí. Podle typu křivky napište souřadnice středu, vrcholů, ohnisek, parametrické popisy os, asymptot, řídící přímky.

a) $y^2 - 6y + 9 = 0$

b) $x^2 - 4y^2 - 6x + 16y - 7 = 0$

c) $x^2 - 7x + 10 = 0$

d) $x^2 + z^2 + 2x - 6z - 6 = 0$, $y = 2$

e) $y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$, $z = 4$

f) $-4x^2 + 25z^2 - 24x - 100z - 36 = 0$, $y = 5$

Řešení

1
- $k(t) = [3\sinh t\ ;\ 4 \pm 2\cosh t]$, $t \in \mathbb{R}$; $a(s) = [\pm 3s\ ;\ 4 + 2s]$, $s \in \mathbb{R}$
- $P_1^x = [-3\sqrt{3}\ ;\ 0]$, $P_2^x = [3\sqrt{3}\ ;\ 0]$, $P_1^y = [0\ ;\ 2]$, $P_2^y = [0\ ;\ 6]$

2
- $k(t) = \left[3 + \frac{t^2}{4}\ ;\ -3\ ;\ 2 + t\right]$, $t \in \mathbb{R}$;
  $o(s) = [s\ ;\ -3\ ;\ 2]$, $d(s) = [2\ ;\ -3\ ;\ s]$, $s \in \mathbb{R}$
- $P = [4\ ;\ -3\ ;\ 0]$
- $k(t) = \left[3 + \frac{t^2}{4}\ ;\ -3\ ;\ 2 + t\right]$, $t \in (-2\ ;\ +\infty)$

3
a) dvojnásobná přímka: $p(t) = [t\ ;\ 3]$, $t \in \mathbb{R}$

b) dvě různoběžky: $k(t) = [3 \pm 2t\ ;\ 2 + t]$, $t \in \mathbb{R}$

c) rovnoběžky: $p(t) = [2\ ;\ t]$, $q(t) = [5\ ;\ t]$, $t \in \mathbb{R}$

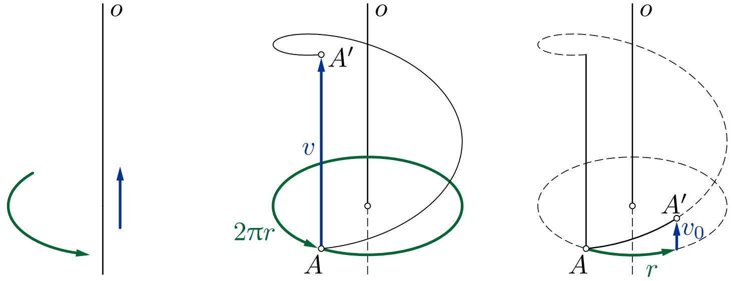
d) kružnice: $k(t) = [-1 + 4\cos t\ ;\ 2\ ;\ 3 + 4\sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi)$;
$S = [-1\ ;\ 2\ ;\ 3]$

e) parabola: $k(t) = \left[-1 - \frac{t^2}{4}\ ;\ 3 + t\ ;\ 4\right]$, $t \in \mathbb{R}$; $V = [-1\ ;\ 3\ ;\ 4]$,
$F = [-2\ ;\ 3\ ;\ 4]$; $o(s) = [s\ ;\ 3\ ;\ 4]$, $d(s) = [0\ ;\ s\ ;\ 4]$, $s \in \mathbb{R}$

f) hyperbola: $k(t) = [-3 + 5\sinh t\ ;\ 5\ ;\ 2 \pm 2\cosh t]$, $t \in \mathbb{R}$;
$S = [-3\ ;\ 5\ ;\ 2]$, $A = [-3\ ;\ 5\ ;\ 0]$, $B = [-3\ ;\ 5\ ;\ 4]$, $o_h(s) = [-3\ ;\ 5\ ;\ s]$,
$o_v(s) = [s\ ;\ 5\ ;\ 2]$, $a(s) = [-3 \pm 5s\ ;\ 5\ ;\ 2 + 2s]$, $s \in \mathbb{R}$

Šroubový pohyb

- **Šroubový pohyb** vzniká složením
  - rovnoměrného otáčení kolem osy o,
  - rovnoměrného posouvání ve směru osy o.



- Vzdálenost, o kterou se objekt posune, když se otočí o plný úhel, je **výška závitu** (označujeme v).
- Vzdálenost, o kterou se objekt posune, když se otočí o 1 radián, je **redukovaná výška závitu** (označujeme v_0).

Šroubový pohyb a šroubovice

- **Šroubový pohyb** je určen:
  - osou šroubového pohybu o,
  - smyslem otáčení (levotočivý $\times$ pravotočivý),
  - výškou závitu v nebo redukovanou výškou závitu v_0 ($v_0 = \frac{v}{2\pi}$).

- **Šroubovice** je křivka, která vzniká šroubovým pohybem bodu $A \not\in o$.

Příklad: Napište parametrické vyjádření šroubovice bodu $A[r,0,0]$.
Šroubový pohyb je určen osou $o = z$ a redukovanou výškou závitu v_0.

- Jako vyjádření otáčivé složky šroubového pohybu sestavíme parametrické vyjádření kružnice s kladnou, resp. zápornou orientací.
  $m(t) = [r \cdot \cos t\,;\, r \cdot \sin t\,;\, 0]$ nebo $[r \cdot \cos t\,;\, -r \cdot \sin t\,;\, 0]$, $t \in \langle 0,2\pi)$
- Jako vyjádření posuvné složky šroubového pohybu přičteme k třetí souřadnicové funkci výraz $v_0 \cdot t$.
  pravotočivá šroubovice: $k(t) = [r \cdot \cos t\,;\, r \cdot \sin t\,;\, v_0 \cdot t]$, $t \in \mathbb{R}$
  levotočivá šroubovice: $k(t) = [r \cdot \cos t\,;\, -r \cdot \sin t\,;\, v_0 \cdot t]$, $t \in \mathbb{R}$

Šroubovice – příklady

1. Napište parametrický popis pravotočivé šroubovice bodu $A[3\,;\,4\,;\,2]$. Osa šroubového pohybu je osa x, redukovaná výška závitu je $v_0 = 2$.

2.
   - Napište parametrický popis levotočivé šroubovice k bodu $A[0\,;\,4\,;\,0]$. Osa šroubového pohybu je osa z, výška závitu je $v = 12$.
   - Spočítejte souřadnice průsečíku R šroubovice k s rovinou $\alpha : z = 4$.
   - Napište rovnici tečny šroubovice k v bodě $B = k\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Spočítejte souřadnice průsečíku této tečny s půdorysnou $\pi(x,y)$. Napište obecnou rovnici normálové roviny šroubovice k v bodě B.
   - $*$Odvoďte parametrický předpis křivky, v jejíchž bodech protínají tečny šroubovice k půdorysnu $\pi(x,y)$.

Řešení

1. $k(t) = [3 + 2t\,;\, 4\cos t - 2\sin t\,;\, 2\cos t + 4\sin t]$, $t \in \mathbb{R}$
2.
   - $k(t) = \left[4\sin t\,;\, 4\cos t\,;\, \frac{6}{\pi}t\right]$, $t \in \mathbb{R}$
   - $R = \left[2\sqrt{3}\,;\, -2\,;\, 4\right]$
   - $p(s) = \left[4\,;\, -4s\,;\, 3 + \frac{6}{\pi}s\right]$, $s \in \mathbb{R}$; $P = p \cap \pi = [4\,;\, 2\pi\,;\, 0]$;
     β: $-4y + \frac{6}{\pi}z - \frac{18}{\pi} = 0$
   - $*\ell(t) = [4\sin t - t \cdot 4\cos t\,;\, 4\cos t + t \cdot 4\sin t\,;\, 0]$, $t \in \mathbb{R}$