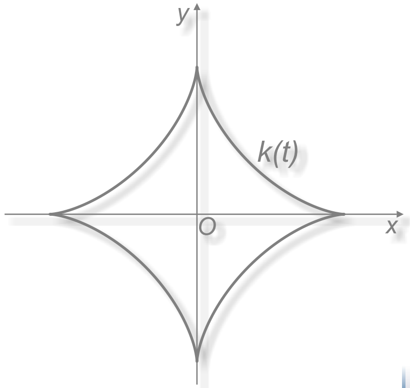
# Matematika I

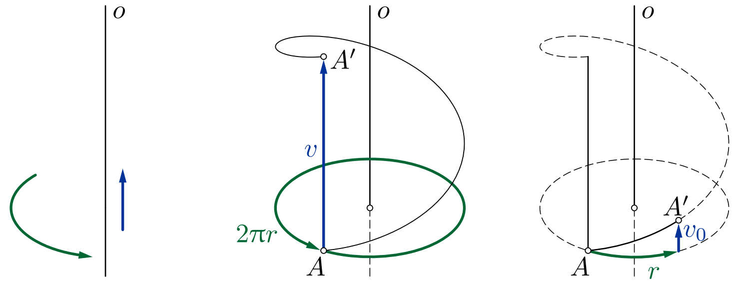
7. PŘEDNÁŠKA 7. 4. 2017






## Šroubový pohyb

- **Šroubový pohyb** vzniká složením
  - rovnoměrného otáčení kolem osy $o$,
  - rovnoměrného posouvání ve směru osy $o$.




- Vzdálenost, o kterou se objekt posune, když se otočí o plný úhel, je **výška závitu** (označujeme $v$).
- Vzdálenost, o kterou se objekt posune, když se otočí o 1 radián, je **redukovaná výška závitu** (označujeme $v_0$).

## Šroubový pohyb a šroubovice

- **Šroubový pohyb** je určen:
  - osou šroubového pohybu $o$,
  - smyslem otáčení (levotočivý $\times$ pravotočivý),
  - výškou závitu $v$ nebo redukovanou výškou závitu $v_0$ ($v_0 = \frac{v}{2\pi}$).

- **Šroubovice** je křivka, která vzniká šroubovým pohybem bodu $A \not\in o$.

<u>Příklad:</u> Napište parametrické vyjádření šroubovice bodu $A[r,0,0]$. Šroubový pohyb je určen osou $o = z$ a redukovanou výškou závitu $v_0$.

- Jako vyjádření otáčivé složky šroubového pohybu sestavíme parametrické vyjádření kružnice s kladnou, resp. zápornou orientací. $m(t) = [r \cdot \cos t\,;\, r \cdot \sin t\,;\, 0]$ nebo $[r \cdot \cos t\,;\, -r \cdot \sin t\,;\, 0]$, $t \in \langle 0,2\pi \rangle$
- Jako vyjádření posuvné složky šroubového pohybu přičteme k třetí souřadnicové funkci výraz $v_0 \cdot t$.

  pravotočivá šroubovice: $k(t) = [r \cdot \cos t\,;\, r \cdot \sin t\,;\, v_0 \cdot t]$, $t \in \mathbb{R}$
  levotočivá šroubovice: $k(t) = [r \cdot \cos t\,;\, -r \cdot \sin t\,;\, v_0 \cdot t]$, $t \in \mathbb{R}$

## Šroubovice – příklady

1. Napište parametrický popis pravotočivé šroubovice bodu $A[3\,;\,4\,;\,2]$. Osa šroubového pohybu je osa $x$, redukovaná výška závitu je $v_0 = 2$.

2.
   - Napište parametrický popis levotočivé šroubovice $k$ bodu $A[0\,;\,4\,;\,0]$. Osa šroubového pohybu je osa $z$, výška závitu je $v = 12$.
   - Spočítejte souřadnice průsečíku $R$ šroubovice $k$ s rovinou $\alpha : z = 4$.
   - Napište rovnici tečny šroubovice $k$ v bodě $B = k\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Spočítejte souřadnice průsečíku této tečny s půdorysnou $\pi(x,y)$. Napište obecnou rovnici normálové roviny šroubovice $k$ v bodě $B$.
   - Odvoďte parametrický předpis křivky, v jejíchž bodech protínají tečny šroubovice $k$ půdorysnu $\pi(x,y)$.

## Asymptoty

- U parametricky zadaných křivek budeme ověřovat pouze existenci asymptot **rovnoběžných se souřadnicovými osami**.
- Existenci asymptoty ověříme vypočtením limit souřadnicových funkcí křivky v krajních bodech intervalů jejího parametru.

  Pro křivku
  $$k(t) = [x(t)\,;\,y(t)\,;\,z(t)],\ t \in (p,q),\quad \{p,q\} \subset \mathbb{R}^*$$
  budeme používat formální zápis
  $$\lim_{t\to p^+} k(t) = \left[\lim_{t\to p^+} x(t)\,;\,\lim_{t\to p^+} y(t)\,;\,\lim_{t\to p^+} z(t)\right],$$
  $$\lim_{t\to q^-} k(t) = \left[\lim_{t\to q^-} x(t)\,;\,\lim_{t\to q^-} y(t)\,;\,\lim_{t\to q^-} z(t)\right].$$

## Asymptoty

$$k(t) = [x(t)\,;\,y(t)\,;\,z(t)],\ t \in (p,q)$$

- Pokud je $\lim\limits_{t\to p^+} k(t) = [\pm\infty\,;\,A\,;\,B]$

  nebo $\lim\limits_{t\to q^-} k(t) = [\pm\infty\,;\,A\,;\,B]$, $\{A,B\} \subset \mathbb{R}$,

  potom má křivka $k(t)$ asymptotu rovnoběžnou s osou $x$:
  $$a(s) = [s\,;\,A\,;\,B],\ s \in \mathbb{R}.$$
- Pokud je $\lim\limits_{t\to p^+} k(t) = [A\,;\,\pm\infty\,;\,B]$

  nebo $\lim\limits_{t\to q^-} k(t) = [A\,;\,\pm\infty\,;\,B]$, $\{A,B\} \subset \mathbb{R}$,

  potom má křivka $k(t)$ asymptotu rovnoběžnou s osou $y$:
  $$a(s) = [A\,;\,s\,;\,B],\ s \in \mathbb{R}.$$
- Pokud je $\lim\limits_{t\to p^+} k(t) = [A\,;\,B\,;\,\pm\infty]$

  nebo $\lim\limits_{t\to q^-} k(t) = [A\,;\,B\,;\,\pm\infty]$, $\{A,B\} \subset \mathbb{R}$,

  potom má křivka $k(t)$ asymptotu rovnoběžnou s osou $z$:
  $$a(s) = [A\,;\,B\,;\,s],\ s \in \mathbb{R}.$$

## Asymptoty – příklad

Je dána křivka
$$k(t) = [\operatorname{tg} t, \cos^2 t]\,,\quad t \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

1. Načrtněte křivku.
2. Určete, zda má křivka asymptoty. Pokud ano, napište jejich obecné rovnice.
3. Napište obecné rovnice tečny a normály křivky $k$ v bodě $B = k\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

1

| $t$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |
| $y(t)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | $1$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

## Asymptoty – příklad

2 $\quad k(t) = [\operatorname{tg} t, \cos^2 t]\,,\quad t \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{t\to -\frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} t &= -\infty\\ \lim_{t\to -\frac{\pi}{2}^+} \cos^2 t &= 0\end{aligned}\right\}\ \lim_{t\to -\frac{\pi}{2}^+} k(t) = [-\infty\,;\,0]$$

Křivka $k$ má pro $t \to -\dfrac{\pi}{2}^+$ asymptotu $y = 0$.

$$\left.\begin{aligned}\lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} t &= +\infty\\ \lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} \cos^2 t &= 0\end{aligned}\right\}\ \lim_{t\to \frac{\pi}{2}^-} k(t) = [+\infty\,;\,0]$$

Křivka $k$ má pro $t \to \dfrac{\pi}{2}^-$ asymptotu $y = 0$.

3 $\quad B = k\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[1\,;\,\frac{1}{2}\right]$

$k'(t) = \left(\frac{1}{\cos^2 x}\,;\,-2\cos t \sin t\right)$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$

$\vec{u_p} = k'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (2,-1)$, $\quad \vec{n_p} = (1,2)$

Tečna křivky $k$ v bodě $B$ je přímka $p$: $x + 2y - 2 = 0$.

Normála křivky $k$ v bodě $B$ je přímka $q$: $2x - y - \frac{3}{2} = 0$.

## Příklad – asteroida

Je dána křivka

$$k(t) = \left[4\cos^3 t\,;\,4\sin^3 t\right], \quad t \in \langle 0{,}2\pi\rangle.$$

- Načrtněte křivku

| $t$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{11\pi}{6}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $4$ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\sqrt{2}$ | | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $4$ |
| $y(t)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{2}$ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $4$ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{2}$ | | $-\frac{1}{2}$ | $0$ |

- Určete tečné vektory křivky $k(t)$ v bodech
  $$k(0),\ k\left(\tfrac{\pi}{2}\right),\ k(\pi),\ k\left(\tfrac{3\pi}{2}\right).$$

Body, ve kterých je tečný vektor křivky nulový nebo neexistuje, nazýváme **singulární body křivky**.

## Singulární body

Body, ve kterých je tečný vektor křivky nulový nebo neexistuje, nazýváme **singulární body křivky**.

- Každou parametricky zadanou křivku můžeme považovat za
  - popis pohybu bodu v čase,
  - popis čáry v rovině nebo v prostoru.
- Singulární bod křivky potom může být takový bod, ve kterém
  - se bod při svém pohybu zastaví,
  - má čára (dráha bodu) špičku.

**Příklad** Přímka $y = x$ může být parametricky popsána např.:

$$[t\,;\,t], \quad \text{nebo} \quad \left[t^3\,;\,t^3\right], \quad \text{nebo} \quad \left[1-t^3\,;\,1-t^3\right], \quad t \in \mathbb{R}$$

- Obecně je singulární bod křivky takový bod, v němž tečný vektor
  - neexistuje při žádné parametrizaci,
  - nebo je nulový při každé parametrizaci.

Zda je bod křivky singulární, budeme ověřovat vždy **pouze pro zadanou parametrizaci**.

## Příklady

1. Zjistěte, zda jsou na křivce
   $$k(t) = \left[\sqrt{(t-1)^2}\,;\,t\right],\ t \in \langle 0\,;\,2\rangle$$
   singulární body, případně určete jejich souřadnice.
2. Ve kterých bodech je tečna křivky
   $$k(t) = \left[3t - t^3\,;\,3t^2\,;\,3t + t^3\right],\ t \in \mathbb{R}$$
   rovnoběžná s rovinou $\alpha : 3x + y + z + 20 = 0$?
   Napište rovnice tečen křivky v těchto bodech.
3. Napište rovnice tečen křivky
   $$k(t) = \left[t - \sin t\,;\,1 - \cos t\,;\,4\sin\frac{t}{2}\right],\ t \in \langle 0{,}2\pi\rangle$$
   v jejích průsečících s osou $x$.

## Příklady – výsledky

1. $k'(t) = \left(\dfrac{t-1}{|t-1|}\,;\,1\right),\ t \in \langle 0\,;\,1) \cup (1\,;\,2\rangle$
   Singulární bod křivky $k$ je $k(1) = [0\,;\,1]$.
2. Tečna křivky $k$ je rovnoběžná s rovinou $\alpha$ pro $t = -1$ a $t = 2$.
   Rovnice tečny v bodě $k(-1) = [-2\,;\,3\,;\,-4]$ je:
   $$p(s) = [-2\,;\,3-s\,;\,-4+s],\ s \in \mathbb{R}.$$
   Rovnice tečny v bodě $k(2) = [-2\,;\,12\,;\,14]$ je:
   $$q(u) = [-2-3u\,;\,12+4u\,;\,14+5u],\ u \in \mathbb{R}.$$
3. Křivka $k$ protíná osu $x$ pro $t = 0$ a $t = 2\pi$.
   Rovnice tečny v bodě $k(0) = [0\,;\,0\,;\,0]$ je:
   $$p(s) = [0\,;\,0\,;\,2s],\ s \in \mathbb{R}.$$
   Rovnice tečny v bodě $k(2\pi) = [2\pi\,;\,0\,;\,0]$ je:
   $$q(u) = [2\pi\,;\,0\,;\,-2u],\ u \in \mathbb{R}.$$