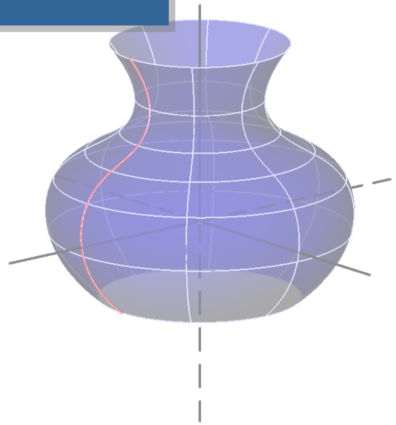
Matematika I

9. PŘEDNÁŠKA 27. 4. 2018



Parametrický popis plochy

Plocha p je dána parametrickým předpisem:

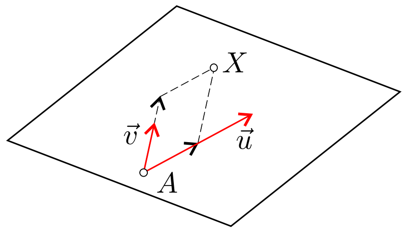
$$p(t,s) = [x(t,s)\ ;\ y(t,s)\ ;\ z(t,s)]$$
$$t \in I \subset \mathbb{R}\ ,\ s \in J \subset \mathbb{R}$$
$$(I,\ J \text{ jsou intervaly})$$

- Souřadnice bodů plochy p jsou vyjádřeny *souřadnicovými funkcemi dvou proměnných* t a s.
- Dosazením konkrétních hodnot t a s ($t \in I$, $s \in J$) do funkcí $x(t,s)$, $y(t,s)$ a $z(t,s)$ získáme souřadnice bodu plochy.
- Jedné dvojici parametrů $t = t_0$ a $s = s_0$ odpovídá jeden bod plochy: $$p(t_0,s_0) = M[m_1,m_2,m_3].$$
- Pro bod plochy $M[m_1,m_2,m_3]$ může existovat více dvojic parametrů tak, že $$M = p(t_0,s_0),\ M = p(t_1,s_1),\ \ldots$$

Příklad - parametrický popis roviny

Rovina α je určena

- bodem $A[a_1,a_2,a_3]$,
- dvěma nenulovými lineárně nezávislými směrovými vektory $\vec{u}(u_1,u_2,u_3)$ a $\vec{v}(v_1,v_2,v_3)$.



Každý bod X roviny α lze popsat pomocí vektorové rovnice
$$X = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v},\ t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}.$$

Parametrický popis roviny α je:
$$\alpha(t,s) = [a_1 + tu_1 + sv_1\ ;\ a_2 + tu_2 + sv_2\ ;\ a_3 + tu_3 + sv_3],$$
$$t \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R}$$

Parametrické křivky

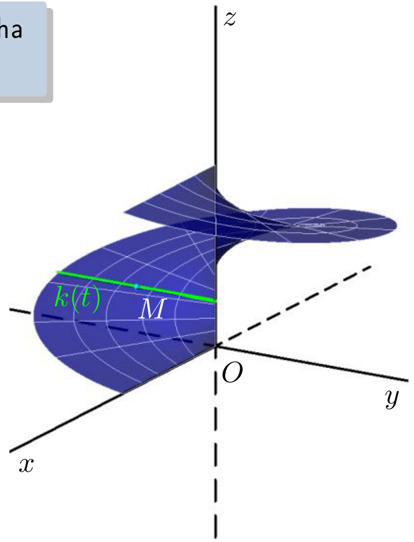
Je dána parametricky zadaná plocha $p(t,s)$, a její bod $M = p(a,b)$.

Dosazením konstantní hodnoty b za proměnný parametr s do předpisu plochy p získáme tzv.

***t*-křivku** plochy,

která prochází bodem M.

$$p(t,b) = k(t)$$
$$M = k(a)$$



Parametrické křivky

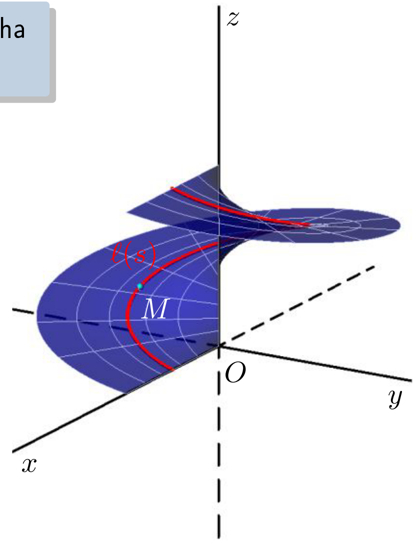
Je dána parametricky zadaná plocha $p(t,s)$, a její bod $M = p(a,b)$.

Dosazením konstantní hodnoty a za proměnný parametr t do předpisu plochy p získáme tzv.

***s*-křivku** plochy,

která prochází bodem M.

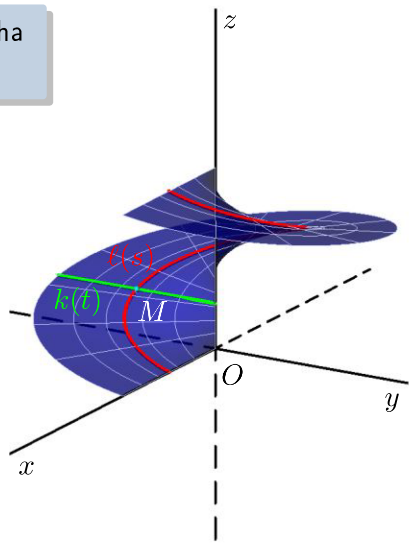
$$p(a,s) = \ell(s)$$
$$M = \ell(b)$$



Parametrické křivky

Je dána parametricky zadaná plocha $p(t,s)$, a její bod $M = p(a,b)$.

Každým bodem plochy prochází t-křivka a s-křivka.



Parametrické křivky – příklad

Část přímé uzavřené přímkové šroubové plochy je dána předpisem:

$$p(t,s) = [t \cdot \cos(s) \; ; \; -t \cdot \sin(s) \; ; \; s],$$
$$t \in \langle 0 \; ; \; 6 \rangle, \; s \in \langle 0 \; ; \; 2\pi \rangle.$$

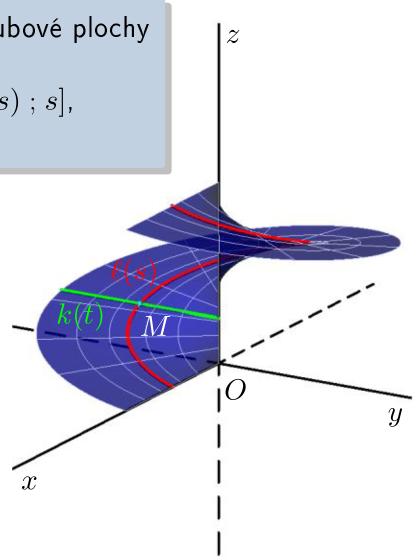
Uvažujme bod plochy $M = p\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$.

- t-křivka plochy procházející bodem M je:

$$k(t) = p\left(t, \tfrac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \left[t \cdot \cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \; ; \; -t \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \; ; \; \tfrac{\pi}{2}\right] =$$
$$= \left[0 \; ; \; -t \; ; \; \tfrac{\pi}{2}\right], \; t \in \langle 0 \; ; \; 6 \rangle.$$

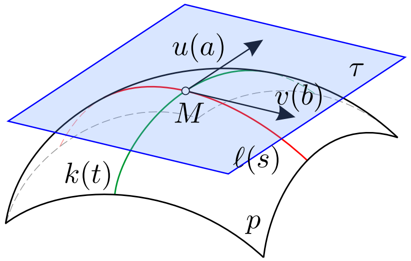
- s-křivka plochy procházející bodem M je:

$$\ell(s) = p(3,s) = [3 \cdot \cos(s) \; ; \; -3 \cdot \sin(s) \; ; \; s], \; s \in \langle 0 \; ; \; 2\pi \rangle.$$



Tečná rovina parametricky dané plochy

- Určíme parametrické křivky plochy $p(t,s)$ procházející bodem M:
  $M = p(a,b)$
  $k(t) = p(t,b)$,
  $\ell(s) = p(a,s)$.



- Určíme tečné vektory parametrických křivek v bodě M.
  - Tečné vektory t-křivky popisuje vektorová funkce: $k'(t) = u(t)$
    Tečný vektor v M je $u(a)$
  - Tečné vektory s-křivky popisuje vektorová funkce: $\ell'(s) = v(s)$
    Tečný vektor v M je $v(b)$
- Tečná rovina τ v M:

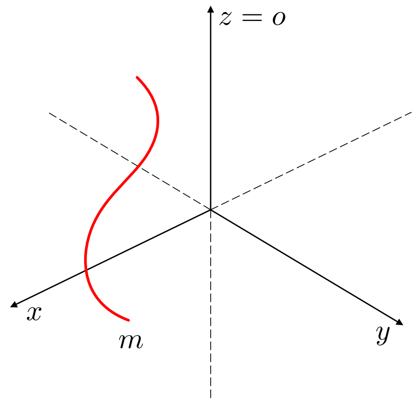
$$\tau : X = M + g \cdot u(a) + h \cdot v(b),\ g \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}.$$

Vytvoření parametrického předpisu rotační plochy

V rovině $\nu(x,z)$ je dána křivka
$m(t) = [x(t)\ ;\ 0\ ;\ z(t)]$, $t \in I$.

Rotační plocha je určena polomeridiánem m a osou rotace $o = z$.

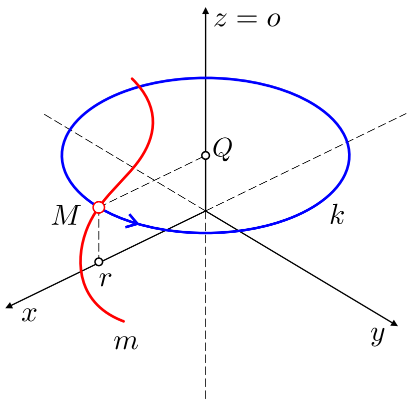
Napište parametrické vyjádření dané rotační plochy.



Vytvoření parametrického předpisu rotační plochy

$m(t) = [x(t)\ ;\ 0\ ;\ z(t)]$, $t \in I$

- Nejprve zvolme pevnou hodnotu $t = t_0$ a tím bod $M = m(t_0) = [x(t_0)\ ;\ 0\ ;\ z(t_0)]$.
- Bod M se pohybuje po rovnoběžkové kružnici k.
- Střed kružnice k je bod $Q[0\ ;\ 0\ ;\ z(t_0)]$, poloměr kružnice je $r = |x(t_0)|$, kružnice leží v rovině $z = z(t_0)$.
- Parametrický popis kružnice k je:
  $k(s) = [x(t_0) \cdot \cos(s)\ ;\ x(t_0) \cdot \sin(s)\ ;\ z(t_0)]$, $s \in \langle 0\ ;\ 2\pi \rangle$.

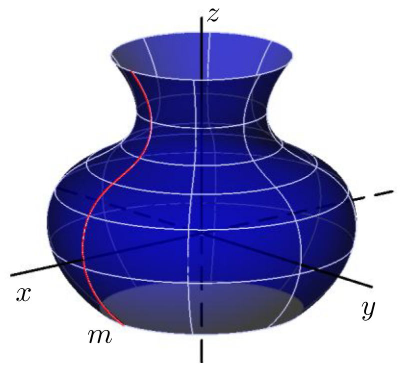


Vytvoření parametrického předpisu rotační plochy

Parametrický popis rotační plochy, která vznikne otáčením křivky

$m(t) = [x(t)\ ;\ 0\ ;\ z(t)]$, $t \in I$

kolem osy z je:



$$p(t,s) = [x(t) \cdot \cos(s)\ ;\ x(t) \cdot \sin(s)\ ;\ z(t)],$$
$$t \in I, \quad s \in \langle 0\ ;\ 2\pi \rangle\,.$$

Příklady

1. Napište parametrické vyjádření kulové plochy se středem v bodě $S[0\,;0\,;8]$ a poloměrem $r=8$.
2. V rovině $\mu(y,z)$ je dána kružnice $(y-2)^2+z^2=1$.
   - Napište parametrické vyjádření rotační plochy, která vznikne otáčením dané kružnice kolem osy $o=z$.
3. V půdorysně $\pi(x,y)$ je dána parabola $y=x^2$.
   - Napište parametrické vyjádření rotační plochy, která vznikne otáčením paraboly kolem osy y.
   - Napište parametrické vyjádření rotační plochy, která vznikne otáčením paraboly kolem osy x.
4. Je dána přímka $\ell=AB$, $A[8\,;4\,;0]$, $B[-4\,;4\,;12]$.
   - Napište parametrické vyjádření rotační plochy,která vznikne otáčením přímky ℓ (úsečky AB) kolem osy z.
   - Napište obecnou rovnici roviny α, ve které leží hrdlová kružnice jednodílného rotačního hyperboloidu (tj. rovnoběžková kružnice s nejmenším poloměrem).

Výsledky

1. $p(t,s)=[8\cos t\cos s\,;\,8\cos t\sin s\,;\,8+8\sin s]$, $t\in\left\langle-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right\rangle$, $s\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$
2. $p(t,s)=[(2+\cos t)\sin s\,;\,(2+\cos t)\cos s\,;\,\sin t]$, $t\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$, $s\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$
3. - $p(t,s)=\left[t\cos s\,;\,t^2\,;\,t\sin s\right]$, $t\in\langle 0\,;\,+\infty)$, $s\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$
   - $p(t,s)=\left[t\,;\,t^2\cos s\,;\,t^2\sin s\right]$, $t\in\mathbb{R}$, $s\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$
4. - $p(t,s)=[(8-t)\cos s\ -4\sin s\,;\,4\cos s\ +(8-t)\sin s\,;\,t]$, $t\in\mathbb{R}$ ($t\in\langle 0\,;\,12\rangle$), $s\in\langle 0\,;\,2\pi\rangle$
   - α: $z=8$