Matematika I – Zkouškový test

VZOROVÉ ZADÁNÍ A

Čas na vypracování: 2 hodiny

1. Vypočítejte
$$\lim_{x\to 0} \operatorname{cotg}^2 x \cdot \ln(\cos x) \ .$$
(*1 bod*)

2. Vyšetřete průběh funkce f. V grafu funkce nakreslete všechny asymptoty, vodorovné tečny a tečny v inflexních bodech. Napište obecné rovnice asymptot a tečen.
$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x}$$
(*8 bodů*)

3. V bokorysně $\mu(y,z)$ je dána elipsa, jejíž ohniska jsou body $E = [0\,;\,2\,;\,0]$ a $F = [0\,;\,8\,;\,0]$, elipsa prochází bodem $O = [0\,;\,0\,;\,0]$. Uvažujte <u>část elipsy</u>, jejíž body mají nezáporné z-ové souřadnice ($z \geqq 0$).

   Dále je dán pravotočivý šroubový pohyb s osou x a výškou závitu $v = 12$.

   Napište parametrický popis dvou závitů šroubové plochy, která vznikne zadaným šroubovým pohybem dané poloviny elipsy.

   (*3 body*)

4. V rovině rovnoběžné s nárysnou $\nu(x,z)$ je dána půlkružnice k o středu $S = [0\,;\,7\,;\,0]$ a poloměru $r = 5$ (z-ové souřadnice bodů uvažované půlkružnice jsou nezáporné).

   Kruhový konoid je určen těmito řídícími útvary:
   - řídící křivka je zadaná půlkružnice k,
   - řídící přímka $\ell = AB$, $A = [5\,;\,0\,;\,0]$, $B = [0\,;\,0\,;\,5]$,
   - řídící rovina je bokorysna $\mu(y,z)$.

   Napište parametrické vyjádření části konoidu mezi křivkami k a ℓ.

   (*3 body*)

5. V půdorysně $\pi(x,y)$ je dána parabola s řídící přímkou $d = AB$ a ohniskem F, $A = [6\,;\,2\,;\,0]$, $B = [6\,;\,-2\,;\,0]$, $F = [0\,;\,0\,;\,0]$. Uvažujte část paraboly s nezápornými x-ovými souřadnicemi.

   V nárysně $\nu(x,z)$je dána hyperbola se středem $S = [0\,;\,0\,;\,0]$ a excentricitou $e = 5$, vrchol hyperboly je bodem dané paraboly. Uvažujte tu větev hyperboly, která protíná danou parabolu.

   Napište parametrické vyjádření *translační plochy parabolicko-hyperbolické*, jejíž řídící křivky jsou daná <u>část</u> paraboly a daná větev hyperboly.

   (*3 body*)

Matematika I – Zkouškový test

VZOROVÉ ZADÁNÍ B

Čas na vypracování: 2 hodiny

1. Vypočítejte

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

(1 bod)

2. Určete definiční obor funkce.

Vyšetřete průběh funkce f na intervalu $\mathcal{D}_f \cap \langle -\pi\ ;\ 5\pi\rangle$. V grafu funkce nakreslete všechny asymptoty, vodorovné tečny a tečny v inflexních bodech. Napište obecné rovnice tečen v inflexních bodech.

$$f(x)=\frac{x}{2}-\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

(8 bodů)

3. V nárysně $\nu(x{,}z)$ je dána parabola, bod $O=[0\ ;\ 0\ ;\ 0]$ je její vrchol, osa paraboly je osa z, bod $P=[2\ ;\ 0\ ;\ 1]$ je bod paraboly. Uvažujte část paraboly mezi body P a $Q=[-2\ ;\ 0\ ;\ 1]$.

Napište parametrické vyjádření jednoho závitu šroubové plochy, která vznikne šroubovým pohybem zadané části paraboly.

Osa pravotočivého šroubového pohybu je osa y, redukovaná výška závitu je $v_0=3$.

(3 body)

4. Je dán levotočivý šroubový pohyb s osou y a výškou závitu 18. Uvažujte dva závity šroubovice bodu $A=[0\ ;\ 0\ ;\ 5]$, bod A je v polovině uvažované části šroubovice.

Přímková plocha (*šroubový konoid*) je dána těmito řídícími útvary:

- řídící křivka k jsou výše popsané dva závity šroubovice,
- řídící přímka ℓ, která je rovnoběžná s osou z a prochází bodem $[10\ ;\ 3\ ;\ 0]$,
- řídící rovina φ, která je kolmá na přímku ℓ.

Napište parametrické vyjádření části konoidu mezi křivkami k a ℓ.

(3 body)

5. V nárysně $\nu(x{,}z)$ je dána hyperbola jejíž střed je bod $S=[0\ ;\ 0\ ;\ 6]$, hlavní vrchol je bod $A=[0\ ;\ 0\ ;\ 3]$ a ohnisko je bod $E=[0\ ;\ 0\ ;\ 0]$. Křivka k je ta větev hyperboly, která protíná půdorysnu $\pi(x{,}y)$.

V bokorysně $\mu(y{,}z)$ je dána kružnice, jejíž střed je bod S. Poloměr kružnice dourčete tak, aby protínala křivku k. Křivka ℓ je dolní polokružnice dané kružnice (tedy ta část dané kružnice, jejíž body mají z-ovou souřadnici menší nebo rovnu z_S).

Napište parametrické vyjádření *translační plochy hyperbolicko-kruhové*, jejíž řídící křivky jsou daná křivka k (jedna větev hyperboly) a křivka ℓ (polokružnice).

(3 body)

Řešení

A1. $-\dfrac{1}{2}$

A2. $\mathcal{D}_f = (-\infty\,;0)\cup(0\,;+\infty)$, není sudá ani lichá, $P^x = [0\,;1]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\dfrac{x-1}{x} = \dfrac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$

Graf funkce má vodorovnou asymptotu $y=\frac{\pi}{4}$, graf funkce nemá svislou asymptotu.

$f'(x) = \dfrac{1}{2x^2-2x+1}$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$

$f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathcal{D}_{f'}$,

graf funkce nemá žádné stacionární body (vodorovné tečny)

x	$(-\infty\,;0)$	$(0\,;+\infty)$
f'	$+$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$

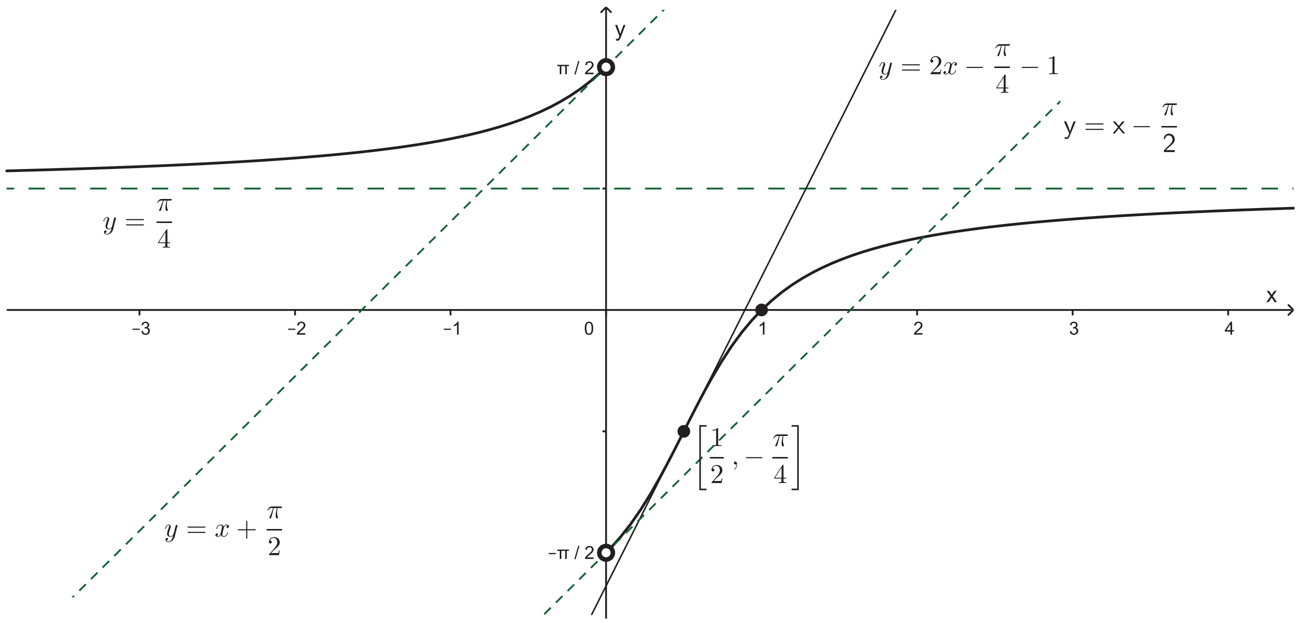
Pozn.: $\lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 1$, graf funkce se blíží do bodů $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ a $\left[0\,;-\dfrac{\pi}{2}\right]$ se směrnicí 1 (v obrázku naznačeno přímkami $y = x+\dfrac{\pi}{2}$ a $y = x-\dfrac{\pi}{2}$).

$f''(x) = \dfrac{2-4x}{(2x^2-2x+1)^2}$, $\mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f$

$f''(x) = 0 \iff x = \dfrac{1}{2}$

x	$(-\infty\,;0)$	$\left(0\,;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}\,;+\infty\right)$
f''	$+$	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cup$	$\cap$

Bod $\left[\dfrac{1}{2}\,;-\dfrac{\pi}{4}\right]$ je inflexní bod, tečna v i.b.: $y = -2x-\dfrac{\pi}{4}-1$.



A3. polovina elipsy: $m(t) = [0\,;5-5\cos t\,;4\sin t]$, $t\in\langle 0\,;\pi\rangle$

$p(t,s) = \left[\dfrac{6}{\pi}s\,;(5-5\cos t)\cos s - 4\sin t\sin s\,;4\sin t\cos s + (5-5\cos t)\sin s\right]$,

$t\in\langle 0\,;\pi\rangle$, $s\in\langle 0\,;4\pi\rangle$

A4. půlkružnice: $k(t) = [5\cos t\,;7\,;5\sin t]$, $t\in\langle 0\,;\pi\rangle$; přímka $\ell(u) = [5-5u\,;0\,;5u]$, $u\in\mathbb{R}$

$p(t,s) = [5\cos t\,;7-7s\,;5\sin t + s(5-5\cos t-5\sin t)]$, $t\in\langle 0\,;\pi\rangle$, $s\in\langle 0\,;1\rangle$

A5. část paraboly: $k(t) = \left[3-\dfrac{t^2}{12}\,;t\,;0\right]$, $t\in\langle -6\,;6\rangle$;

větev hyperboly: $\ell(s) = [3\cosh s\,;0\,;4\sinh s]$, $s\in\mathbb{R}$

$p(t,s) = \left[3\cosh s - \dfrac{t^2}{12}\,;t\,;4\sinh s\right]$, $t\in\langle -6\,;6\rangle$, $s\in\mathbb{R}$

B1. $-\dfrac{1}{2}$

B2. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, vyšetřujeme na intervalu $I = \langle -\pi\ ;\ 5\pi \rangle$
$P^x = P^y = [0\ ;\ 0]$, $f(-\pi) = \left[-\pi\ ;\ -\dfrac{\pi}{2} + 1\right]$, $f(5\pi) = \left[5\pi\ ;\ \dfrac{5\pi}{2} - 1\right]$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f$
$f'(x) = 0 \iff x \in \{0,\ 4\pi\}$,

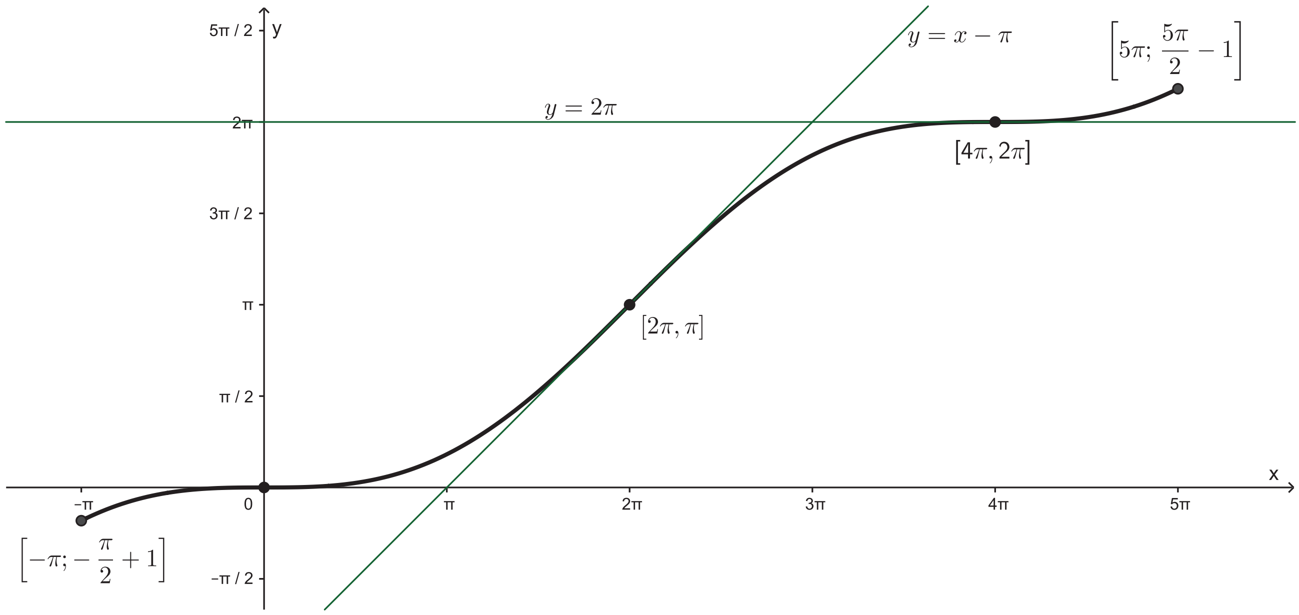
x	$\langle -\pi\ ;\ 0)$	0	$(0\ ;\ 4\pi)$	4π	$(4\pi\ ;\ 5\pi\rangle$
f'	$+$	0	$+$	0	$+$
f	$\nearrow$	i.b.	$\nearrow$	i.b.	$\nearrow$

Body $[0\ ;\ 0]$ a $[4\pi\ ;\ 2\pi]$ jsou inflexní body, vodorovné tečny $y = 0$, $y = 2\pi$.

$f''(x) = \dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\mathcal{D}_{f''} = \mathcal{D}_f$
$f''(x) = 0 \iff x \in \{0,\ 2\pi,\ 4\pi\}$,

x	$\langle -\pi\ ;\ 0)$	0	$(0\ ;\ 2\pi)$	2π	$(2\pi\ ;\ 4\pi)$	4π	$(4\pi\ ;\ 5\pi\rangle$
f''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\bigcap$	i.b.	$\bigcup$	i.b.	$\bigcap$	i.b.	$\bigcup$

Kromě bodů zjištěných z první derivace je také bod $[2\pi\ ;\ \pi]$ inflexní bod, tečna $y = x - \pi$.



B3. část paraboly: $m(t) = \left[t\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{t^2}{16}\right]$, $t \in \langle -2\ ;\ 2\rangle$

$p(t,s) = \left[t\cos s + \dfrac{t^2}{16}\sin s\ ;\ 3s\ ;\ \dfrac{t^2}{16}\cos s - t\sin s\right]$, $t \in \langle -2\ ;\ 2\rangle$, $s \in \langle 0\ ;\ 2\pi\rangle$

B4. dva závity šroubovice: $k(t) = \left[-5\sin t\ ;\ \dfrac{9}{\pi}t\ ;\ 5\cos t\right]$, $t \in \langle -2\pi\ ;\ 2\pi\rangle$;
přímka: $\ell(u) = [10\ ;\ 3\ ;\ u]$, $u \in \mathbb{R}$
$p(t,s) = \left[-5\sin t + s(10 + 5\sin t)\ ;\ \dfrac{9}{\pi}t + s\left(3 - \dfrac{9}{\pi}t\right)\ ;\ 5\cos t\right]$, $t \in \langle -2\pi\ ;\ 2\pi\rangle$, $s \in \langle 0\ ;\ 1\rangle$

B5. větev hyperboly: $k(t) = \left[3\sqrt{3}\sinh t\ ;\ 0\ ;\ 6 - 3\cosh t\right]$, $t \in \mathbb{R}$
polovina kružnice: $\ell(s) = [0\ ;\ 3\cos s\ ;\ 6 - 3\sin s]$, $s \in \langle 0\ ;\ \pi\rangle$
$p(t,s) = \left[3\sqrt{3}\sinh t\ ;\ 3\cos s\ ;\ 9 - 3\cosh t - 3\sin s\right]$, $t \in \mathbb{R}$, $s \in \langle 0\ ;\ \pi\rangle$