Statika 1

2. přednáška
Průřezové veličiny

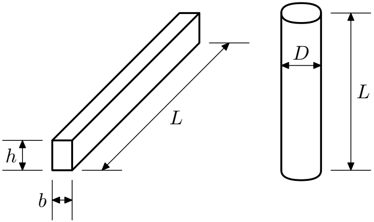
Miroslav Vokáč
miroslav.vokac@klok.cvut.cz

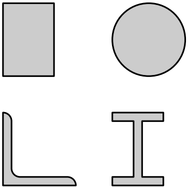
ČVUT v Praze, Fakulta architektury

7. března 2016

Průřez

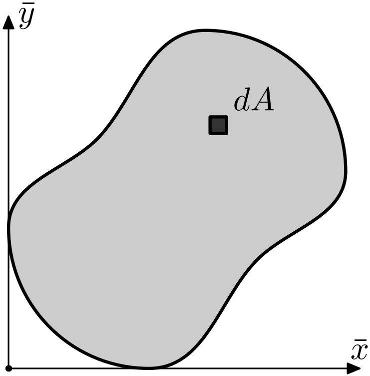
- **Prut** je konstrukční prvek, u kterého je délka *L* mnohem větší než šířka *b* i výška *h*.
- Prutem je např. trám, sloup, průvlak nebo prvek příhradové soustavy.
- **Průřez** je tvar příčného řezu prutu.

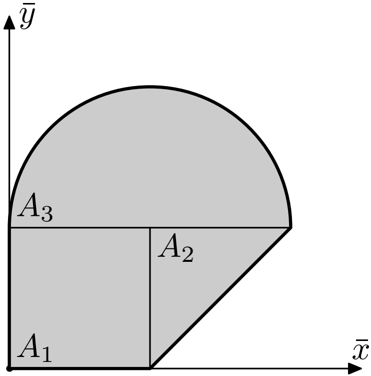




Plocha průřezu

Základní jednotka: m^2



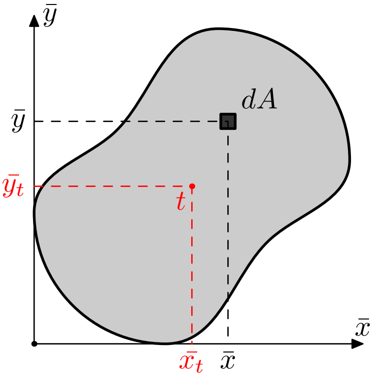


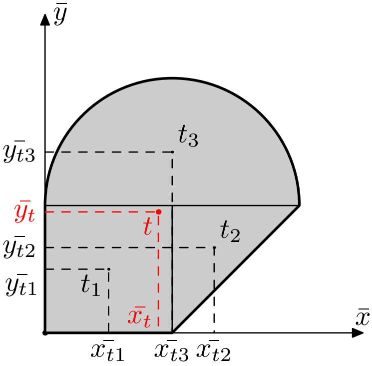
$$A = \int_A \mathrm{d}A$$

$$A = \sum_i A_i$$

Statický moment průřezu

Základní jednotka: m^3





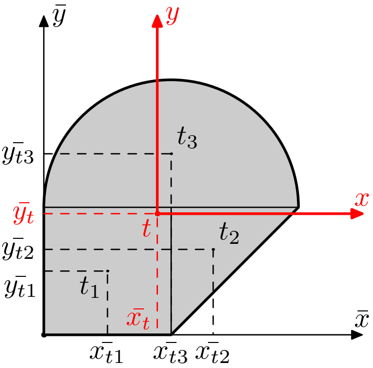
$$S_{\bar{x}} = A\,\bar{y}_t = \int_A \bar{y}\,\mathrm{d}A$$

$$S_{\bar{y}} = A\,\bar{x}_t = \int_A \bar{x}\,\mathrm{d}A$$

$$S_{\bar{x}} = A\,\bar{y}_t = \sum_i A_i\,\bar{y}_{ti}$$

$$S_{\bar{y}} = A\,\bar{x}_t = \sum_i A_i\,\bar{x}_{ti}$$

Těžiště průřezu



Poloha těžiště se u složeného průřezu vypočte:

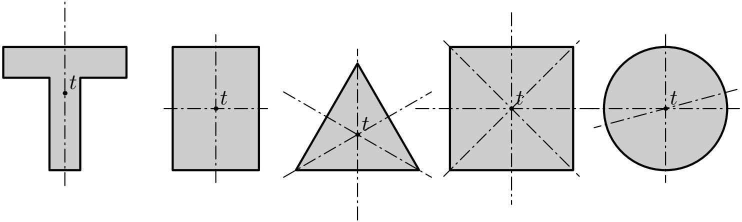
$$\bar{x}_t = \frac{S_{\bar{y}}}{A} = \frac{\sum A_i\,\bar{x}_{ti}}{\sum A_i}$$

$$\bar{y}_t = \frac{S_{\bar{x}}}{A} = \frac{\sum A_i\,\bar{y}_{ti}}{\sum A_i}$$

Do těžiště umisťujeme počátek **těžišťového systému souřadnic *xy*.**

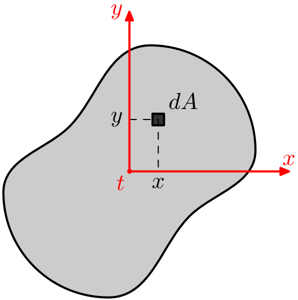
Těžiště průřezu

- Statický moment k těžišťové ose je nulový.
- Pokud má průřez 1 osu symetrie, leží těžiště na této ose.
- Pokud má průřez 2 a více os symetrie, leží těžiště v průsečíku těchto os.
- U průřezu středově symetrického leží těžiště ve středu symetrie.



Momenty setrvačnosti průřezu

Základní jednotka: m^4



Momenty setrvačnosti:

$$I_x = \int_A y^2 \,\mathrm{d}A$$

$$I_y = \int_A x^2 \,\mathrm{d}A$$

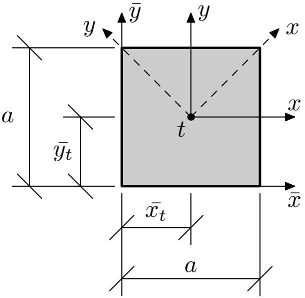
Deviační moment:

$$D_{xy} = \int_A xy \,\mathrm{d}A$$

- **Moment setrvačnosti** plochy ($A > 0$) k těžišťovým osám je vždy kladný ($I_x \in \Re^+$, $I_y \in \Re^+$).
- **Deviační moment** k těžišťovým osám může být kladný, záporný i nulový ($D_{xy} \in \Re$).
- **Pro základní geometrické obrazce** (čtverec, obdélník, trojúhelník, kruh, půlkruh, čtvrtkruh, ...) **jsou integrály** spočítány a **tabelovány**. Viz odborná literatura nebo viz `http://15122.fa.cvut.cz`.

Momenty setrvačnosti

Čtverec

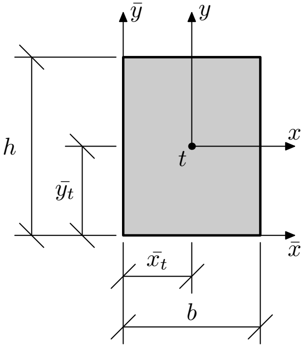


$$A = a^2$$
$$\bar{x}_t = \bar{y}_t = \tfrac{1}{2}a$$
$$I_x = I_y = \tfrac{1}{12}a^4$$
$$D_{xy} = 0$$

Při natočení průřezu nebo souřadného systému xy o 90° je třeba zaměnit výrazy pro I_x a I_y a změnit znaménko výrazu pro D_{xy}!

Momenty setrvačnosti

Obdélník

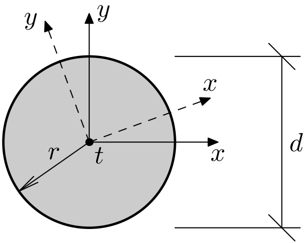


$$A = bh$$
$$\bar{x}_t = \frac{1}{2}b$$
$$\bar{y}_t = \frac{1}{2}h$$
$$I_x = \frac{1}{12}bh^3$$
$$I_y = \frac{1}{12}hb^3$$
$$D_{xy} = 0$$

Při natočení průřezu nebo souřadného systému xy o 90° je třeba zaměnit výrazy pro I_x a I_y a změnit znaménko výrazu pro D_{xy}!

Momenty setrvačnosti

Kruh

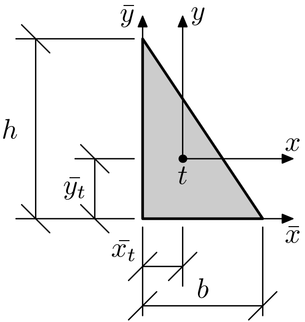


$$A = \pi r^2 = \tfrac{1}{4}\pi d^2$$
$$I_x = I_y = \tfrac{1}{4}\pi r^4 = \tfrac{1}{64}\pi d^4$$
$$D_{xy} = 0$$

Při natočení průřezu nebo souřadného systému xy o 90° je třeba zaměnit výrazy pro I_x a I_y a změnit znaménko výrazu pro D_{xy}!

Momenty setrvačnosti

Pravoúhlý trojúhelník

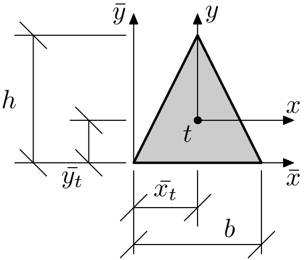


$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$\bar{x}_t = \frac{1}{3}b$$
$$\bar{y}_t = \frac{1}{3}h$$
$$I_x = \frac{1}{36}bh^3$$
$$I_y = \frac{1}{36}hb^3$$
$$D_{xy} = -\frac{1}{72}b^2h^2$$

Při natočení průřezu nebo souřadného systému xy o 90° je třeba zaměnit výrazy pro I_x a I_y a změnit znaménko výrazu pro D_{xy}!

Momenty setrvačnosti

Rovnoramenný trojúhelník

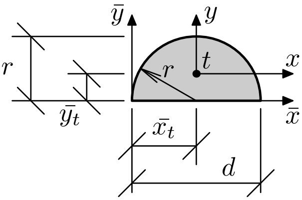


$$A = \frac{1}{2}bh$$
$$\bar{x}_t = \frac{1}{2}b$$
$$\bar{y}_t = \frac{1}{3}h$$
$$I_x = \frac{1}{36}bh^3$$
$$I_y = \frac{1}{48}hb^3$$
$$D_{xy} = 0$$

Při natočení průřezu nebo souřadného systému xy o 90° je třeba zaměnit výrazy pro I_x a I_y a změnit znaménko výrazu pro D_{xy}!

Momenty setrvačnosti

Půlkruh

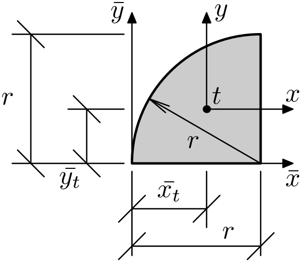


$$A = \frac{1}{2}\pi r^2$$
$$\bar{x}_t = \frac{1}{2}d = r$$
$$\bar{y}_t = \frac{4r}{3\pi}$$
$$I_x = r^4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)$$
$$I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$$
$$D_{xy} = 0$$

Při natočení průřezu nebo souřadného systému *xy* o 90° je třeba zaměnit výrazy pro I_x a I_y a změnit znaménko výrazu pro D_{xy}!

Momenty setrvačnosti

Čtvrtkruh

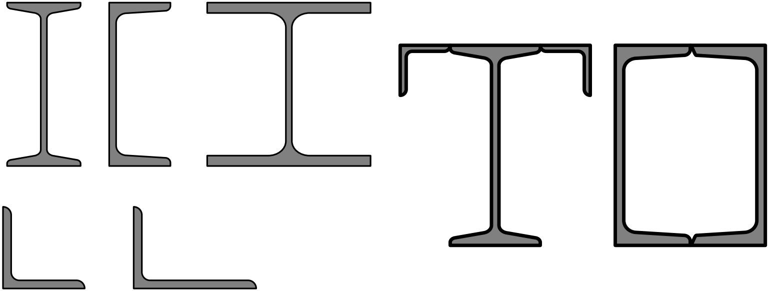


$$A = \tfrac{1}{4}\pi r^2$$
$$\bar{x}_t = r(1 - \tfrac{4}{3\pi})$$
$$\bar{y}_t = \tfrac{4r}{3\pi}$$
$$I_x = I_y = \tfrac{1}{2}r^4(\tfrac{\pi}{8} - \tfrac{8}{9\pi})$$
$$D_{xy} = +r^4(\tfrac{4}{9\pi} - \tfrac{1}{8})$$

Při natočení průřezu nebo souřadného systému xy o 90° je třeba zaměnit výrazy pro I_x a I_y a změnit znaménko výrazu pro D_{xy}!

Momenty setrvačnosti

Ocelové válcované průřezy

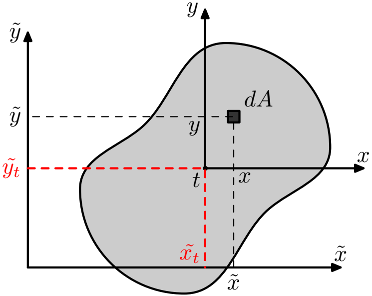


Pro ocelové válcované průřezy jsou tabulky s polohou těžiště, plochou a momenty setrvačnosti v odpovídajících normách, statických tabulkách nebo ocelářských tabulkách.

Momenty setrvačnosti průřezu

Steinerova věta

Steinerova věta: Moment setrvačnosti k mimotěžišťové ose $\tilde{x}$ rovnoběžné s těžišťovou osou x se rovná těžišťovému momentu setrvačnosti I_x zvětšenému o součin plochy A a čtverce vzdálenosti obou os $\tilde{y}_t{}^2$.



$$I_{\tilde{x}} = I_x + A\tilde{y}_t{}^2$$

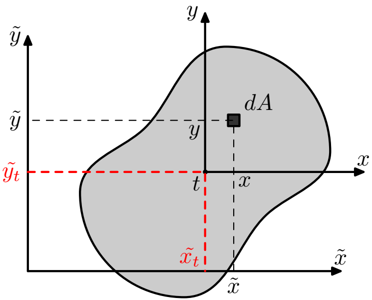
Analogicky platí:

$$I_{\tilde{y}} = I_y + A\tilde{x}_t{}^2$$

$$D_{\tilde{x}\tilde{y}} = D_{xy} + A\tilde{x}_t\tilde{y}_t$$

Momenty setrvačnosti průřezu

Steinerova věta - důkaz



Transformační vztahy při posunu souřadných os:

$\tilde{x} = x + \tilde{x}_t$

$\tilde{y} = y + \tilde{y}_t$

Důkaz Steinerovy věty: $I_{\tilde{x}} = \int\limits_A \tilde{y}^2 \,\mathrm{d}A = \int\limits_A (y + \tilde{y}_t)^2 \,\mathrm{d}A =$

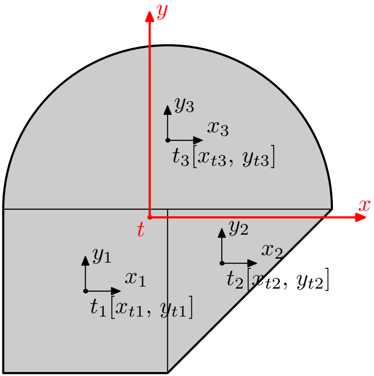
$= \int\limits_A y^2 \,\mathrm{d}A + 2\tilde{y}_t \int\limits_A y \,\mathrm{d}A + \tilde{y}_t{}^2 \int\limits_A \mathrm{d}A =$

$= I_x + 2\tilde{y}_t S_x + A\tilde{y}_t{}^2 = I_x + A\tilde{y}_t{}^2$

Podobně lze odvodit: $I_{\tilde{y}} = I_y + A\tilde{x}_t{}^2$ a $D_{\tilde{x}\tilde{y}} = D_{xy} + A\tilde{x}_t\tilde{y}_t$

Momenty setrvačnosti průřezu

Těžišťové momenty setrvačnosti složeného průřezu



Podle Steinerovy věty platí:

$$I_x = \sum_i (I_{x_i} + A_i {y_{ti}}^2)$$

$$I_y = \sum_i (I_{y_i} + A_i {x_{ti}}^2)$$

$$D_{xy} = \sum_i (D_{x_i y_i} + A_i x_{ti} y_{ti})$$

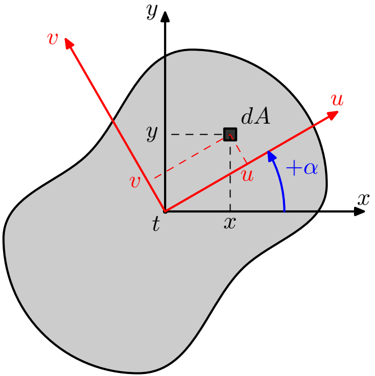
Při výpočtu D_{xy} pozor na znaménka $D_{x_i y_i}$, x_{ti} a y_{ti}!

Hlavní těžišťové osy průřezu

- Těžišťových souřadných systémů je nekonečně mnoho.
- Nejdůležitější jsou těžišťové osy, ke kterým je moment setrvačnosti maximální a minimální.
- Tyto osy nazýváme **hlavní těžišťové (centrální) osy setrvačnosti** a budeme je označovat x_c a y_c.
- Je třeba najít úhel natočení těžišťových os α_0, pro který jsou momenty setrvačnosti maximální, resp. minimální.

Hlavní těžišťové osy průřezu

Transformace momentů při natočení těžišťových os



S využitím transformačních vzorců

$u = x \cos\alpha + y \sin\alpha$

$v = y \cos\alpha - x \sin\alpha$

platí: $I_u = \int_A v^2 \,\mathrm{d}A = \int_A (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 \,\mathrm{d}A =$

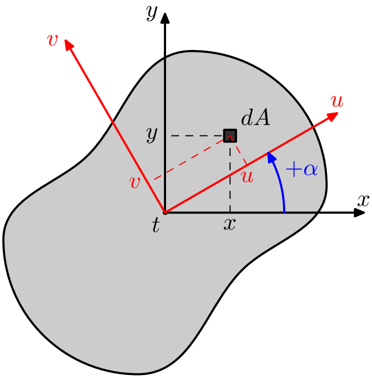
$= \cos^2\alpha \int_A y^2 \,\mathrm{d}A - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A xy \,\mathrm{d}A + \sin^2\alpha \int_A x^2 \,\mathrm{d}A =$

$= I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - D_{xy} \sin 2\alpha$

Podobně lze odvodit vzorce pro I_v a D_{uv}.

Hlavní těžišťové osy průřezu

Transformace momentů při natočení těžišťových os



Pro natočené osy u a v platí:

$$I_u = I_x \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha - D_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_v = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + D_{xy} \sin 2\alpha$$

$$D_{uv} = \frac{1}{2}(I_x - I_y) \sin 2\alpha + D_{xy} \cos 2\alpha$$

Hlavní těžišťové osy průřezu

Maximalizace, resp. minimalizace, momentu setrvačnosti I_v

- Úhel natočení hlavních centrálních os setrvačnosti α_0 se určí např. maximalizací, resp. minimalizací, transformačního vztahu pro I_v, který derivujeme podle α a položíme rovno nule.

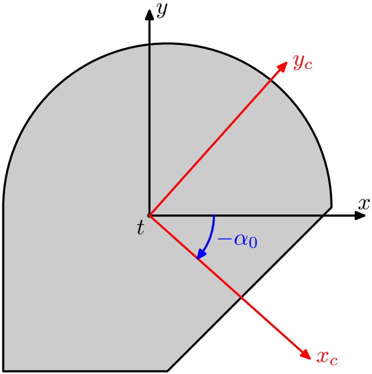
$I_v = I_x \sin^2\alpha + I_y \cos^2\alpha + D_{xy} \sin 2\alpha$
$I'_v(\alpha) = 2I_x \sin\alpha\cos\alpha - 2I_y \cos\alpha\sin\alpha + 2D_{xy}\cos 2\alpha = 0$
$I'_v(\alpha) = 2\left\{\frac{1}{2}(I_x - I_y)\sin 2\alpha + D_{xy}\cos 2\alpha\right\} = 2D_{uv}(\alpha) = 0$
Řešením této rovnice získáme úhel natočení hlavních těžišťových os setrvačnosti α_0.

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha_0 = \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}$$

Z rovnice $I'_v(\alpha) = 2D_{uv}(\alpha) = 0$ také plyne, že deviační moment

k hlavním těžišťovým osám je nulový.

Hlavní těžišťové osy a hlavní centrální momenty setrvačnosti



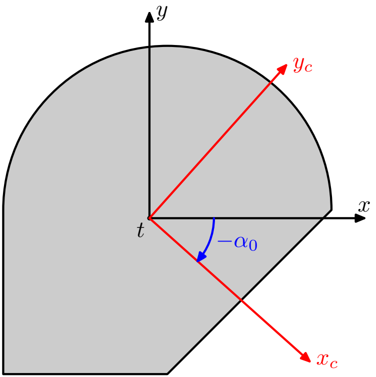
Úhel natočení hlavních centrálních os setrvačnosti:

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha_0 = \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}$$

Hlavní centrální momenty setrvačnosti:

$$I_{x_c} = I_x \cos^2\alpha_0 + I_y \sin^2\alpha_0 - D_{xy} \sin 2\alpha_0$$
$$I_{y_c} = I_x \sin^2\alpha_0 + I_y \cos^2\alpha_0 + D_{xy} \sin 2\alpha_0$$
$$D_{x_c y_c} = 0$$

Hlavní těžišťové osy a momenty setrvačnosti



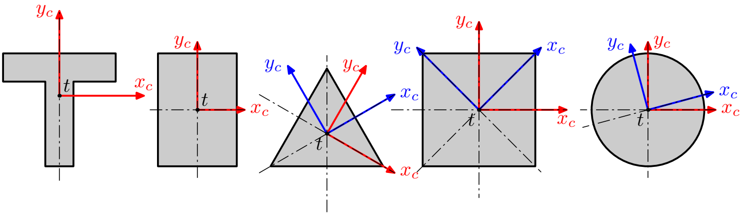
- Pokud platí $I_{x_c} \geq I_{y_c}$ a $I_x \geq I_y$, potom musí platit $I_{x_c} \geq I_x \geq I_y \geq I_{y_c}$.
- Součet momentů setrvačnosti je invariantní veličina, proto se otočením souřadného systému jeho hodnota nemění. Musí tedy platit $I_{x_c} + I_{y_c} = I_x + I_y$.
- Deviační moment k hlavním těžišťovým osám je nulový ($D_{x_c y_c} = 0$).

- Hlavní centrální momenty setrvačnosti lze vypočítat i podle vzorce

$$I_{x_c,y_c} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + D_{xy}^2}$$

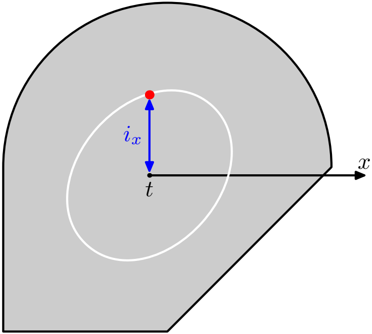
Hlavní těžišťové osy a momenty setrvačnosti

- Pokud má průřez 1 osu symetrie, leží na této ose jedna hlavní těžišťová osa průřezu.
- Pokud má průřez 2 osy symetrie, jsou tyto osy také hlavní centrální osy setrvačnosti.
- Pokud má průřez 3 a více os symetrie, je každý těžišťový souřadný systém také hlavní centrální.



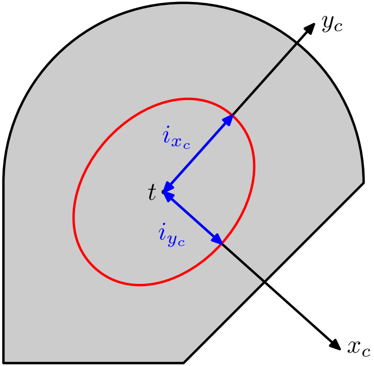
Elipsa setrvačnosti průřezu

- **Poloměr setrvačnosti** průřezu i_x k těžišťové ose x je definován jako vzdálenost od těžiště, kde má hmotný bod, do kterého je soustředěna veškerá hmota průřezu, stejný moment setrvačnosti k ose x jako průřez.
- Množina takových bodů pro všechny těžišťové osy průřezu je nazývána **elipsa setrvačnosti**.



$$I_x = A i_x^2$$

Elipsa setrvačnosti průřezu



- Hlavní poloosy elipsy setrvačnosti jsou poloměry setrvačnosti k hlavním centrálním osám setrvačnosti:

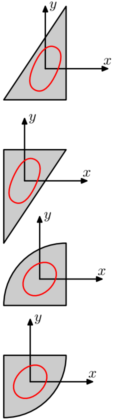
$$i_{x_c} = \sqrt{\frac{I_{x_c}}{A}}$$

$$i_{y_c} = \sqrt{\frac{I_{y_c}}{A}}$$

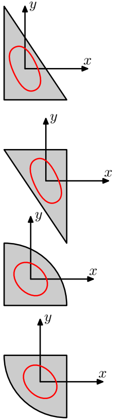
Elipsa setrvačnosti průřezu

Natočení elipsy setrvačnosti odpovídá znaménku deviačního momentu D_{xy}.

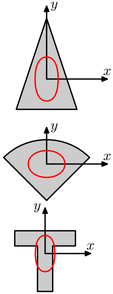
$D_{xy} > 0$



$D_{xy} < 0$



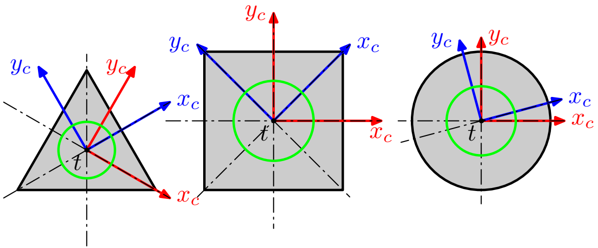
$D_{xy} = 0$



$x \equiv x_c$
$y \equiv y_c$

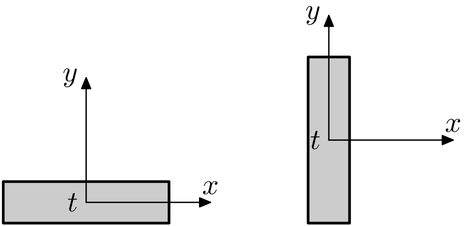
Elipsa setrvačnosti průřezu

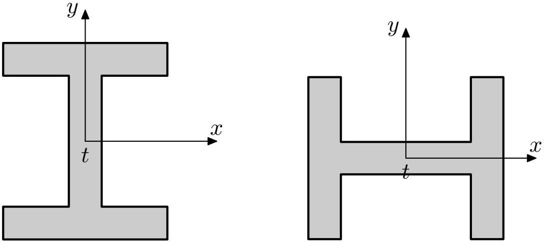
- Pokud má průřez 3 a více os symetrie, elipsa setrvačnosti má tvar kružnice.
- Pokud elipsa setrvačnosti má tvar kružnice, potom každý těžišťový systém souřadnic je hlavní centrální.
- Hlavních centrálních souřadných systémů souřadnic je v takovém případě nekonečně mnoho.
- Příkladem může být kruhový průřez, čtverec nebo pravidelný n-úhelník.



Kontrolní otázka

Který průřez má větší moment setrvačnosti I_x?

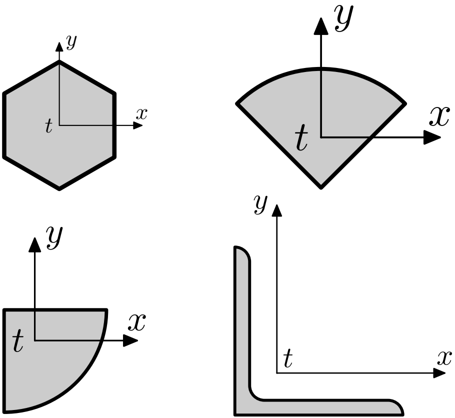




Kontrolní otázka

Určete, zda pro daný průřez platí:

a) $D_{xy} = 0$ b) $D_{xy} < 0$ c) $D_{xy} > 0$



Konec přednášky

Děkuji za pozornost.

Vysázeno systémem LaTeX.
Obrázky vytvořeny v systému .