

Statika 1

4. přednáška

Vnitřní síly na prutech

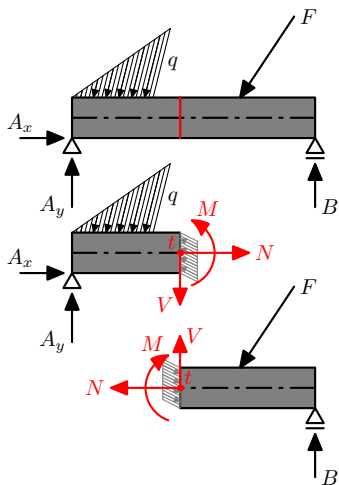
Miroslav Vokáč
miroslav.vokac@cvut.cz

ČVUT v Praze, Fakulta architektury

11. dubna 2016

Vnitřní síly na prutech

Vnitřní síly – síly působící uvnitř tělesa (desky, prutu), které vznikají působením vnějšího zatížení a reakcí.



Vnitřní síly na prutech tvoří výslednice napětí v průřezu transformovaná do těžiště průřezu.

Označení vnitřních sil dle ČSN ISO 3898:

1. **V** – Posouvající síla [N]
2. **M** – Ohybový moment [N m]
3. **N** – Normálová síla [N]

Ve všech řezech tělesa působí vnitřní síly, které jsou v rovnováze.

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

Vnitřní síly na lomených nosnících a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Konvence vnitřních sil

Smyk

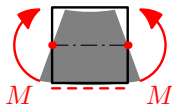
Kladný směr posouvající síly



Ohyb

Kladný směr ohybového momentu

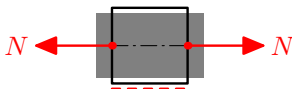
Kladný ohybový moment táhne dolní vlákna průřezu.



Tah & Tlak

Kladný směr normálové síly

Kladná normálová síla je tahová.



Podmínky ekvivalence

Definice vnitřních sil na prutu

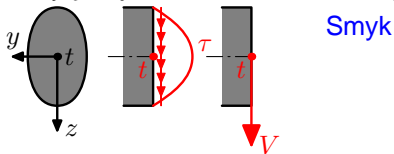
Mechanické napětí – síla na jednotku plochy [Pa] = [$\frac{N}{m^2}$]

σ – normálové napětí v průřezu

τ – smykové (tečné) napětí v průřezu

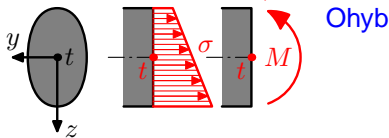
Osa x leží ve střednici prutu.

Osy y, z jsou hlavní centrální osy setrvačnosti.



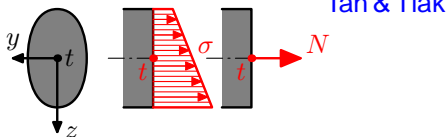
Smyk

$$V = \int_A \tau \, dA$$



Ohyb

$$M = \int_A z \sigma \, dA$$



Tah & Tlak

$$N = \int_A \sigma \, dA$$

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

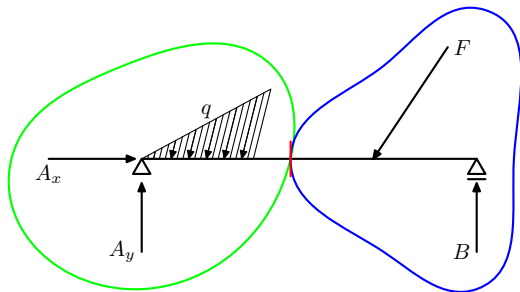
Vnitřní síly na lomených nosnících a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

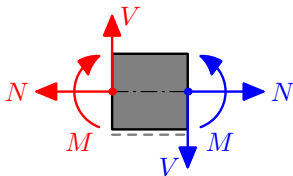
Výpočet vnitřních sil

Posouvající síla V



- **Posouvající síla v libovolném průřezu** se vypočte jako součet všech sil kolmých ke střednici prutu v daném řezu, které se nacházejí na jedné straně od tohoto průřezu.

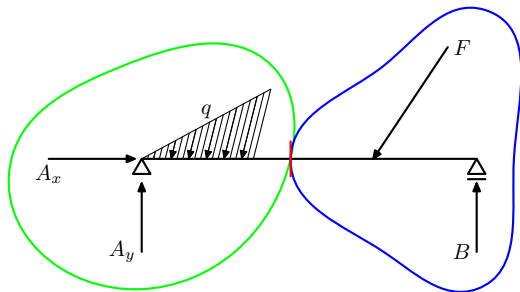
Kladný směr při sčítání zleva



Kladný směr při sčítání zprava

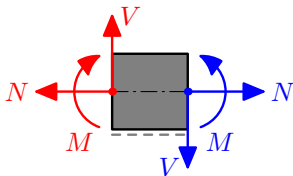
Výpočet vnitřních sil

Ohybový moment M



- **Ohybový moment v libovolném průřezu** se určí jako součet ohybových momentů všech sil nacházejících se na jedné straně od daného průřezu k těžišti tohoto průřezu.

Kladný směr při
sčítání zleva



Kladný směr při
sčítání zprava

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti
vnitřních sil

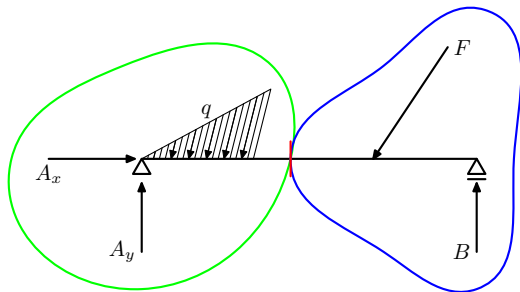
Vnitřní síly na
lomených nosnících
a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

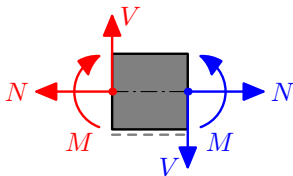
Výpočet vnitřních sil

Normálová síla N



- **Normálová síla v libovolném průřezu** je součet všech sil rovnoběžných se střednicí prutu v daném řezu, které se nacházejí na jedné straně od tohoto průřezu.

Kladný směr při sčítání zleva



Kladný směr při sčítání zprava

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

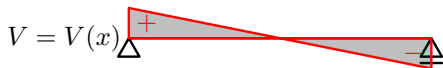
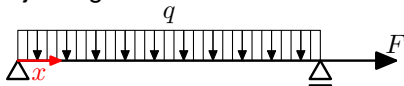
Vnitřní síly na lomených nosnících a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Vnitřní síly jako funkce

- ▶ Posouvající sílu, ohybový moment i normálovou sílu mohou určit pro libovolný průřez prutu.
- ▶ Vnitřní síly můžeme vyjádřit jako funkci souřadnice x a vynášíme je do grafu.



- ▶ **Ohybové momenty vynášíme na stranu tažených vláken!**

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

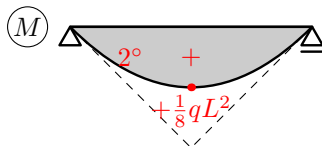
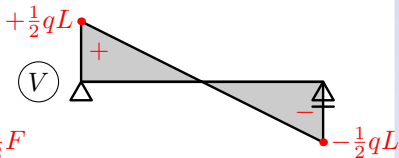
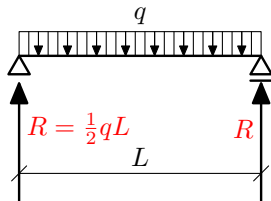
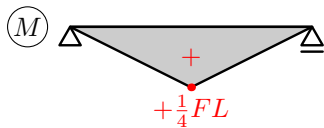
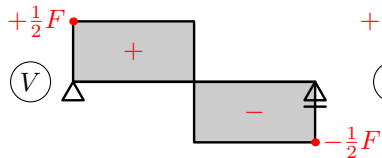
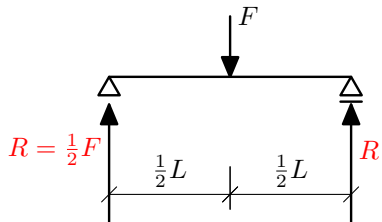
Vnitřní síly na lomených nosnících a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Prostý nosník

Síla uprostřed & spojitě zatížení na celé délce



Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

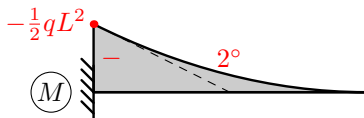
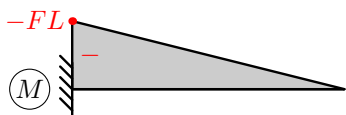
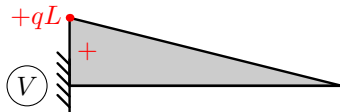
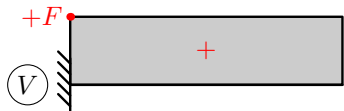
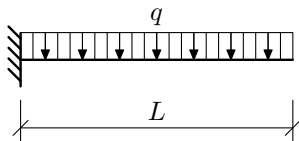
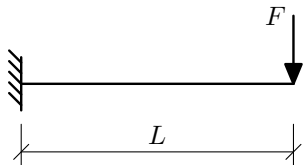
Vnitřní síly na lomených nosnících a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Konzola

Síla na konci & spojitě zatížení na celé délce



Vlastnosti vnitřních sil

- ▶ **Na úseku, kde je spojitě zatížení $q = 0$ platí:**

$V(x)$ je konstantní funkce.

$M(x)$ je lineární funkce.

- ▶ **Na úseku, kde q je nenulová konstantní funkce platí:**

$V(x)$ je lineární funkce.

$M(x)$ je parabola (polynom 2°).

- ▶ **Na úseku, kde q je lineární funkce platí:**

$V(x)$ je parabola (polynom 2°).

$M(x)$ je kubická parabola (polynom 3°).

Mezi funkcemi platí vztahy, které označujeme jako
Schwedlerova věta:

$$V'(x) = -q(x)$$

$$M'(x) = V(x)$$

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti
vnitřních sil

Vnitřní síly na
lomených nosnících
a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Vlastnosti vnitřních sil

Nespojitost funkce $V(x)$

- ▶ **Posouvající síla** je nespojitá v bodě, kde působí osamělá síla. Osamělou silou je i reakce.
- ▶ Rozdíl hodnot V vlevo a vpravo je roven velikosti této síly.
- ▶ Graf **ohybového momentu** je v tomto bodě zalomen, protože je nespojitá jeho derivace.

Vlastnosti vnitřních sil

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

Vnitřní síly na lomených nosnicích a soustavách

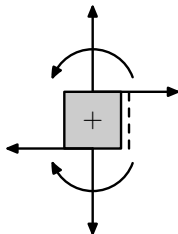
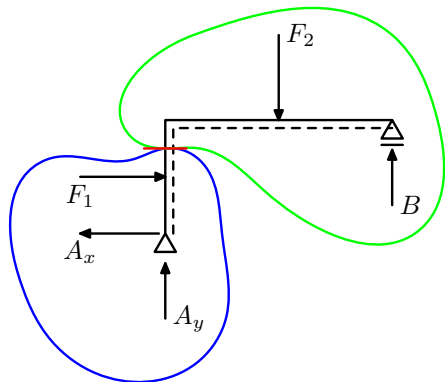
Příklady

Kontrolní otázky

Umístění extrému ohybového momentu:

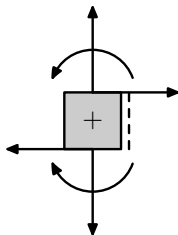
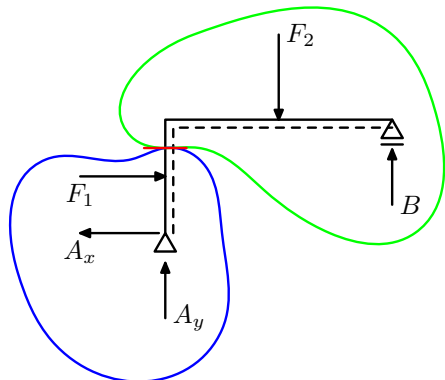
1. Pod osamělou silou, kde je $V(x)$ nespojitá funkce a mění se v tomto bodě znaménko.
2. V bodě, kde je nulová hodnota posouvající síly, tj. v bodě, kde platí $M'(x) = V(x) = 0$.
(U parabolického průběhu $M(x)$ není třeba kontrolovat konkávnost, resp. konvexnost, v okolí tohoto bodu.)

Lomený nosník



- ▶ Nejprve u svislých prutů volím „dolní vlákna“ vlevo nebo vpravo (označím čárkovanou čárou).
- ▶ Vnitřní síly vypočtu podle konvence natočené odpovídajícím směrem.

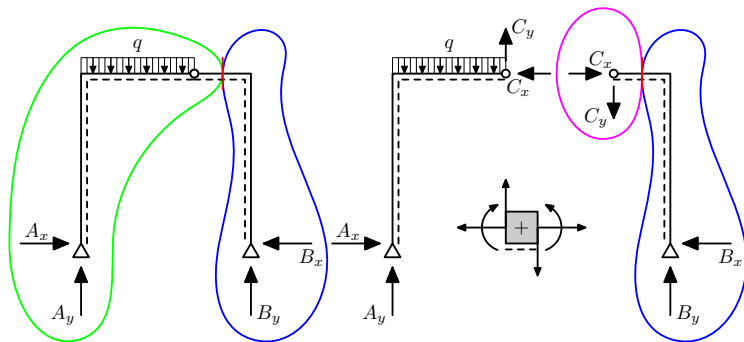
Lomený nosník



Při opačné volbě dolních vláken:

- ▶ Znaménko V a N se nezmění. Znaménko jednoznačně určuje směr V a N .
- ▶ Znaménko M je opačné. Při dodržení pravidla $+M$ na stranu „dolních vláken“ vynesu průběh ohybových momentů stejně. Pravidlo „ M na stranu tažených vláken“ jednoznačně určuje smysl M .

Statically determinate system

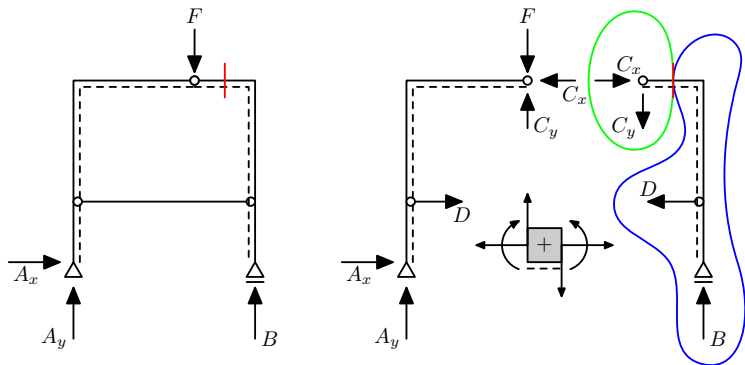


K výpočtu vnitřních sil v daném řezu mohou použít:

- ▶ Statické schéma celé soustavy (řez v místě daného průřezu musí rozdělit soustavu na 2 části).
- ▶ Statické schéma jednotlivé desky nebo prutu.

Při libovolné volbě způsobu výpočtu musí vyjít stejný výsledek, protože konstrukce je ve statické rovnováze!

Sticky určitá soustava



V některých případech nelze využít statické schéma celé soustavy, protože daný řez nerozdělí soustavu na 2 samostatné celky.

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

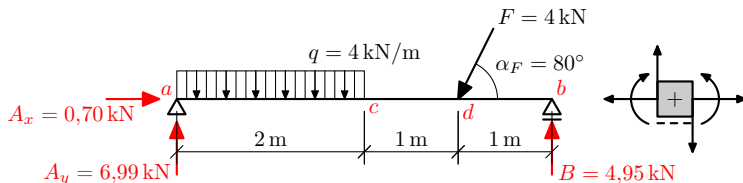
Vnitřní síly na lomených nosnicích a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Příklad

Přímý nosník



Posouvající síly:

$$V_{ac} = A_y = 6,99 \text{ kN}$$

$$V_c = A_y - q \cdot 2 = -1,01 \text{ kN}$$

$$V_{dc} = A_y - q \cdot 2 = -1,01 \text{ kN}$$

$$V_{db} = A_y - q \cdot 2 - F \sin \alpha_F = -4,95 \text{ kN}$$

$$V_{bd} = A_y - q \cdot 2 - F \sin \alpha_F = -4,95 \text{ kN}$$

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

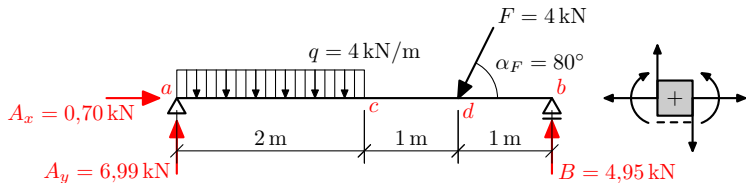
Vnitřní síly na lomených nosnicích a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Příklad

Přímý nosník



Ohybové momenty:

$$M_a = 0 \text{ kN m}$$

$$M_c = A_y \cdot 2 - \frac{1}{2} q \cdot 2^2 = 5,97 \text{ kN m}$$

$$M_d = B \cdot 1 = 4,95 \text{ kN m}$$

$$M_b = 0 \text{ kN m}$$

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

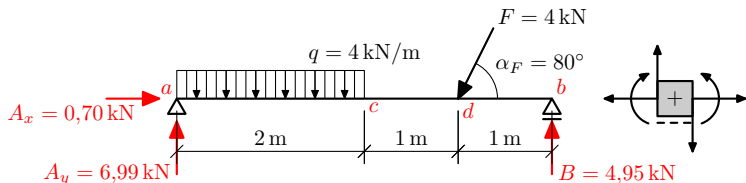
Vnitřní síly na lomených nosnících a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Příklad

Přímý nosník



Normálové síly:

$$N_{ac} = -A_x = -0,70 \text{ kN}$$

$$N_c = -A_x = -0,70 \text{ kN}$$

$$N_{dc} = -A_x = -0,70 \text{ kN}$$

$$N_{db} = -A_x + F \cos \alpha_F = 0 \text{ kN}$$

$$N_b = -A_x + F \cos \alpha_F = 0 \text{ kN}$$

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

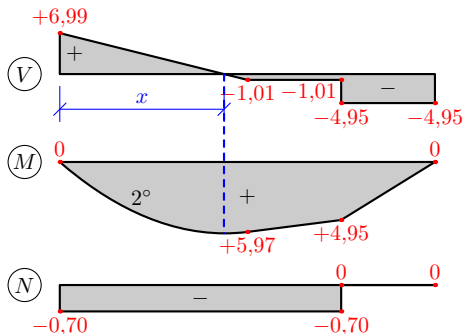
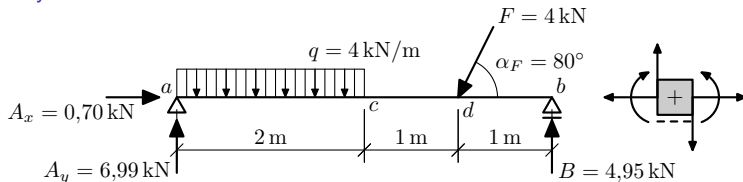
Vnitřní síly na lomených nosnicích a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Příklad

Přímý nosník



$$V(x) = A_y - qx = 0 \Rightarrow x = 1,75 \text{ m}$$

$$M(x) = A_y x - \frac{1}{2} q x^2 = 6,10 \text{ kN m}$$

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

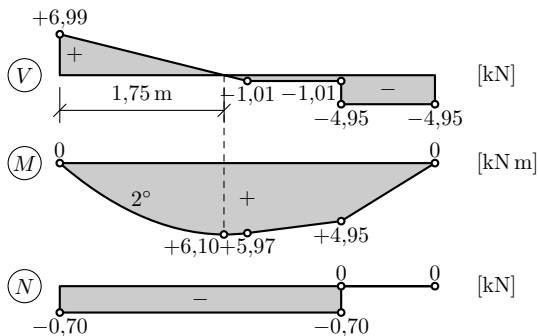
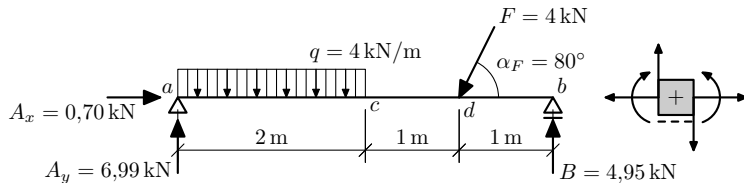
Vnitřní síly na lomených nosnících a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

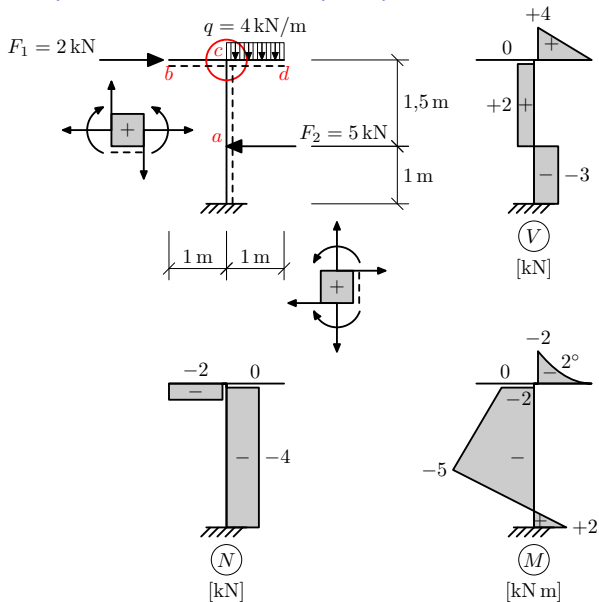
Příklad

Přímý nosník



Příklad

Lomený nosník - kontrola rovnováhy ve styčniku



Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

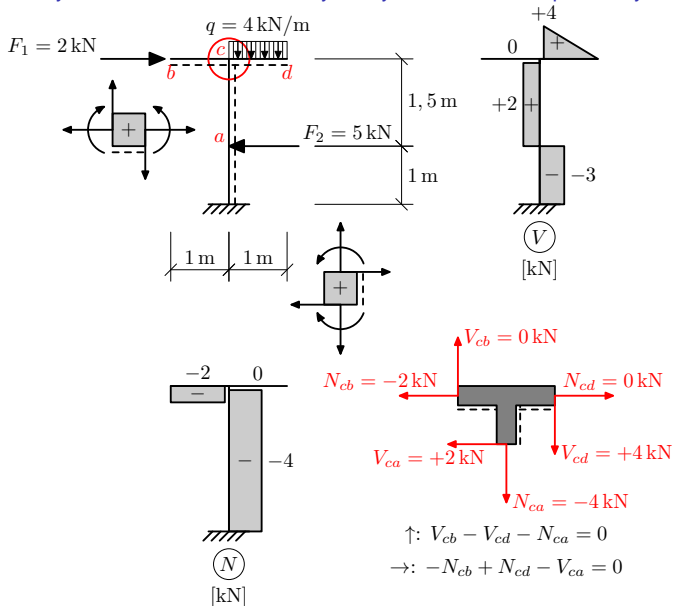
Vnitřní síly na lomených nosnících a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Příklad

Lomený nosník - kontrola rovnováhy ve styčniku - součtové podmínky



Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

Vnitřní síly na lomených nosnících a soustavách

Příklady

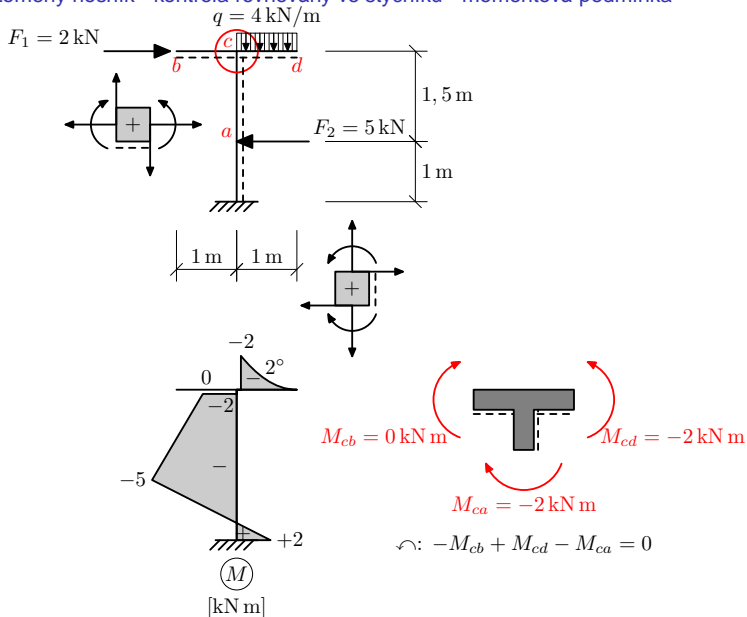
Kontrolní otázky

$$\uparrow: V_{cb} - V_{cd} - N_{ca} = 0$$

$$\rightarrow: -N_{cb} + N_{cd} - V_{ca} = 0$$

Příklad

Lomený nosník - kontrola rovnováhy ve styčniku - momentová podmínka



Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

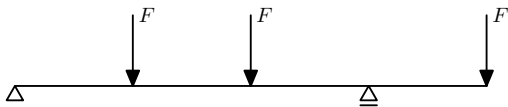
Vnitřní síly na lomených nosnících a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Kontrolní otázka

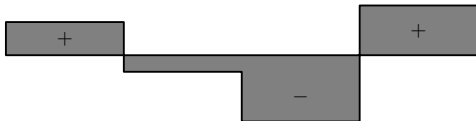
Určete, který průběh posouvající síly V odpovídá danému zatížení.



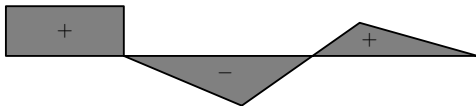
A) V



B) V

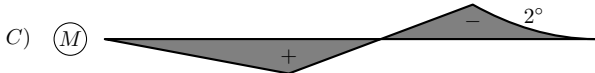
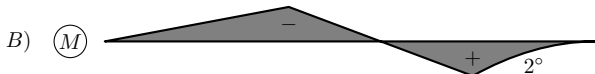
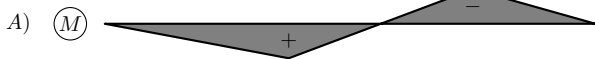
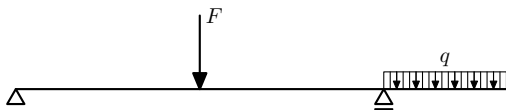


C) V



Kontrolní otázka

Určete, který průběh ohybových momentů M odpovídá danému zatížení.



Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti vnitřních sil

Vnitřní síly na lomených nosnicích a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Definování vnitřních sil

Průběhy a vlastnosti
vnitřních sil

Vnitřní síly na
lomených nosnících
a soustavách

Příklady

Kontrolní otázky

Děkuji za pozornost.

Vysázeno systémem \LaTeX .

Obrázky vytvořeny v systému METAPOST.