Statika 2

1. přednáška
Prosté případy pružnosti:
Prostý ohyb
Prosté kroucení vybraných průřezů

Miroslav Vokáč
miroslav.vokac@cvut.cz

ČVUT v Praze, Fakulta architektury

5. října 2016

Konzultační hodiny

Ing. Miroslav Vokáč, Ph.D.

Klonerův ústav, ČVUT v Praze
Šolínova 7
166 08 Praha 6 - Dejvice

Konzultační hodiny: *Pondělí 14 - 15 hod. v TH9:508*

Tel.: `224 353 509`
E-mail: `miroslav.vokac@cvut.cz`
URL: `http://15122.fa.cvut.cz`

Organizace výuky

Podmínky k udělení zápočtu ze Statiky II:

1. Docházka na cvičení min. 80 %.
2. Každý student navštěvuje cvičení, kde je zapsán v KOSu. Přesun není možný.
3. Odevzdané a správně vypracované domácí úkoly (celkem 6 úkolů).
4. Termín pro odevzdání domácího cvičení je 14 dní od jeho zadání (viz také harmonogram na `http://15122.fa.cvut.cz`).
5. Uzavření udělování zápočtů v zimním semestru 2016/2017 je 31. 1. 2017.

Organizace výuky

Zkouška ze Statiky II:

- Dle Studijního a zkušebního řádu ČVUT v Praze má každý studen 1 řádný a nejvýše 2 opravné termíny, viz SZŘ, čl. 10, odst. 4. Další opravná zkouška je dle SZŘ nepřípustná.
- Podmínkou přihlášení je udělený zápočet ze Statiky II.
- Odhlášení ze zkoušky 3 dny před termínem zkoušky.
- Neomluvená nepřítomnost je klasifikována F.
- Ve zkouškovém období budou termíny zkoušky v pondělí a ve čtvrtek.
- V březnu budou 2 termíny, které budou v KOSu otevřené jen pro opravy. První termín je nutné vyčerpat ve zkouškovém období!
- Pro zimní semestr 2016/2017 je poslední den pro konání zkoušky dle rozhodnutí děkana 17. 3. 2017.

Organizace výuky

Zkouška ze Statiky II: Písemná část obsahuje 4 části:

1. Test – teoretické otázky ze Statiky I a Statiky II.
2. Vnitřní síly na staticky určité soustavě.
3. Příklad na prosté případy pružnosti.
4. Příklad na ostatní úlohy z pružnosti a pevnosti.

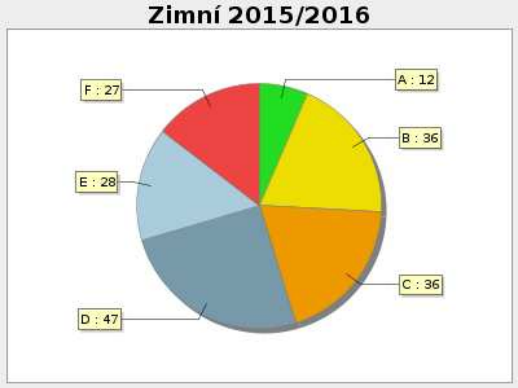
Pomůcky ke zkouškové písemce:

- Kalkulačka, čisté listy papíru, psací potřeby.
- Výpis důležitých vzorců libovolného zpracování (psaný text, tiskárna PC, Xerox,...). Omezen je formát papíru na 1 list A4. Tato pomůcka není povolena při Testu.

Organizace výuky

Statistika výsledků klasifikace STATIKA II v roce 2016/2017:

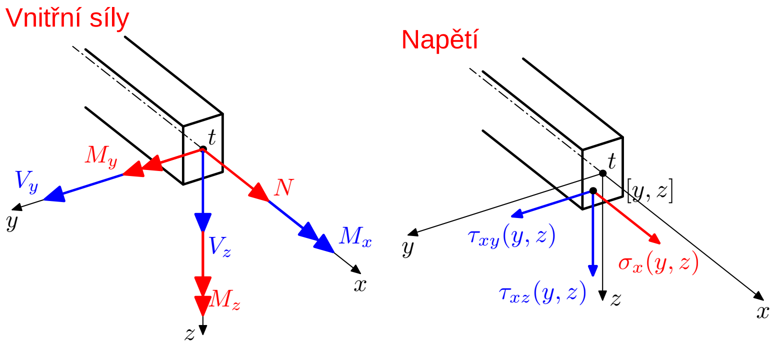
- Zapsáno studentů na předmět: 211
- Neuděleno zápočtů: 22
- Uděleno zápočtů: 189
- Úspěšně dokončilo předmět: 159
- Na zkoušku se dostavilo 186 studentů s výsledkem:



Doporučená literatura

- Radmila Vondrová. *Statika II. Příklady.* Praha : ČVUT, 2005. ISBN 80-01-03289-2.
- Tadeusz Kolendowicz. *Stavební mechanika pro architekty.* Přeložil doc. Ing. Jiří Muk, CSc. Praha : SNTL, 1984. 290s.
- Dvořák Jiří. *Stavební mechanika.* Praha : SOBOTÁLES, 1994. ISBN 80-901570-7-6.
- Hibbeler, R. C. *Structural analysis.* Boston : Prentice hall, 2009. ISBN 0-13-257053-X.
- Puchmajer, P.; Řezníčková, J. *Sbírka úloh z pružnosti a pevnosti.* Praha : ČVUT, 2002. ISBN 80-01-02448-2.
- Hořejší, J.; Šafka, J. a kol. *Statické tabulky.* Technický průvodce, svazek 51. Praha : SNTL, 1987.
- Žák, J., Pěnčík, J. *Stavební mechanika, statika, pružnost a pevnost.* Antikva, 2005. ISBN 80-239-4965-9.

Vnitřní síly a napětí v průřezu



- Osy y a z jsou hlavní těžišťové osy setrvačnosti průřezu.
- **Normálové napětí** σ – při působení N, M_y, M_z (a M_x).
- **Tečné napětí** τ – při působení V_y, V_z, M_x.

Prosté případy pružnosti

U prostých případů pružnosti je v průřezu jen jedna vnitřní síla nenulová.

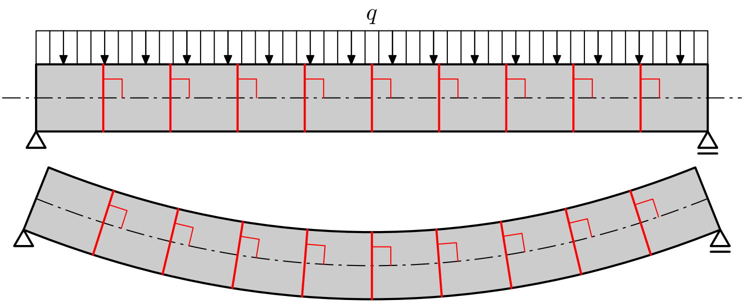
Prosté případy pružnosti:

- **Prostý tah & tlak** – viz Statika I.
- **Prostý smyk** – viz Statika I.
- **Prosté kroucení**.
- **Prostý ohyb**.

Na `http://15122.fa.cvut.cz` lze na stránkách Statiky I nalézt výklad pro úvod k prostým případům pružnosti, napětí v průřezu, vnitřní síly, hlavní těžišťové osy setrvačnosti, momenty setrvačnosti atd.

Prostý ohyb

Bernoulli-Navierova hypotéza

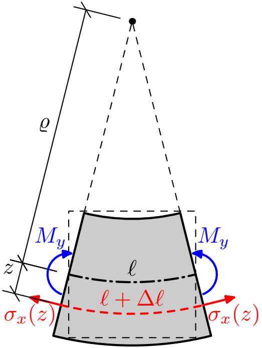


Bernoulli-Navierova hypotéza: Průřez ohýbaného nosníku zůstává po deformaci rovinný a kolmý na průhybovou čáru.

Z Bernoulli-Navierovy hypotézy a ze základních rovnic pružnosti lze odvodit vztahy pro prostý ohyb, které si budeme uvádět.

Prostý ohyb

Odvození vztahu pro křivost



Předpokládejme prut ohýbaný konstantním ohybovým momentem M_y.

Pro $\varepsilon(z)$ lze odvodit:
$\frac{\ell}{\ell+\Delta\ell} = \frac{1}{1+\varepsilon(z)} = \frac{\varrho}{\varrho+z} \Rightarrow \varepsilon(z) = \frac{z}{\varrho}$

Dosazením do Hookeova zákova získáme: $\sigma(z) = E\varepsilon(z) = E\frac{z}{\varrho}$

Dosazením do podmínky ekvivalence:
$M_y = \int_A \sigma(z)\, z \,\mathrm{d}A = \frac{E}{\varrho} \int_A z^2 \,\mathrm{d}A$

Proto můžeme vyjádřit:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_y}{EI_y}$$

$\frac{1}{\varrho}$. . . je křivost
EI_y. . . je ohybová tuhost průřezu

Prostý ohyb

Odvození vztahu pro σ_x u prostého ohybu

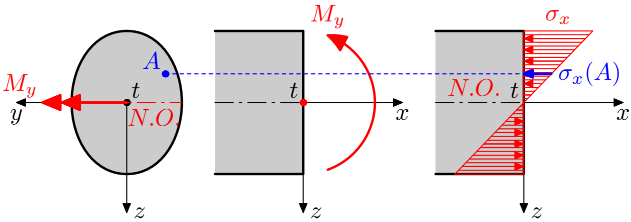
Křivost: $\frac{1}{\varrho} = \frac{M_y}{EI_y}$

Dosadíme vztah $\varepsilon(z) = \frac{z}{\varrho} \Rightarrow \frac{1}{\varrho} = \frac{\varepsilon(z)}{z}$, potom: $\frac{\varepsilon(z)}{z} = \frac{M_y}{EI_y}$

Po dosazení Hookeova zákova $\sigma_x(z) = E\varepsilon(z) \Rightarrow \varepsilon(z) = \frac{\sigma_x(z)}{E}$ získáme: $\frac{\sigma_x(z)}{Ez} = \frac{M_y}{EI_y}$

Odtud plyne vztah:

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} z$$

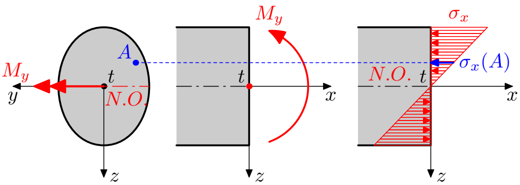


Prostý ohyb ve svislé rovině *xz*

Normálové napětí v průřezu

Prostý ohyb ve svislé rovině:

$M_y \neq 0 \wedge N = M_x = M_z = V_y = V_z = 0$



Normálové napětí σ_x se určí pro každý bod průřezu:

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} z$$

Neutrální osa (N.O.) je množina bodů s nulovou hodnotou normálového napětí a rozděluje průřez na taženou a tlačenou oblast. Z podmínky $\sigma_x(z) = 0$ plyne, že N.O. tvoří přímo osa y. Extrémní normálové napětí je v bodu nejvíce vzdáleném od N.O.

Prostý ohyb ve svislé rovině *xz*

Podmínka spolehlivosti a průřezový modul

Podmínka spolehlivosti podle dovolených namáhání:

$$|\sigma_{x,extr}| = \frac{|M_y|}{W_y} \leq \sigma_{dov}$$

$W_y \ldots$ je průřezový modul (modul průřezu), uvažuje se jako kladné číslo, základní jednotka je m^3

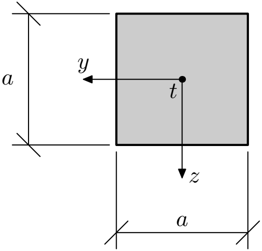
$$W_y = \frac{I_y}{\max(z_d,\ |z_h|)}$$

Je-li vzdálenost těžiště k dolním z_d a horním vláknům $|z_h|$ odlišná, potom se někdy také rozlišuje:

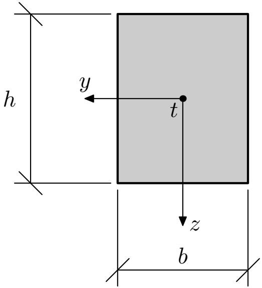
$$W_{y,d} = \frac{I_y}{z_d} \qquad \text{a} \qquad W_{y,h} = \frac{I_y}{|z_h|}$$

Prostý ohyb ve svislé rovině *xz*

Průřezový modul některých základních průřezů



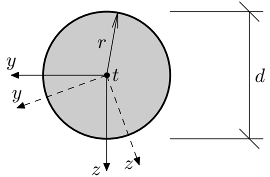
$$W_y = \frac{1}{6}\, a^3$$



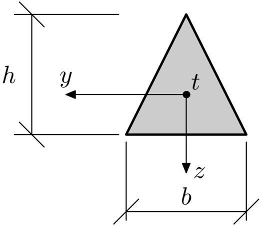
$$W_y = \frac{1}{6}\, b\, h^2$$

Prostý ohyb ve svislé rovině *xz*

Průřezový modul některých základních průřezů



$$W_y = \frac{1}{4}\pi r^3 = \frac{1}{32}\pi d^3$$

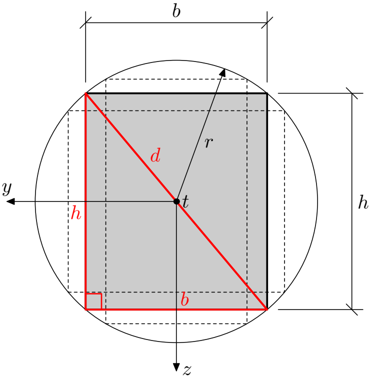


$$W_{y,h} = \frac{1}{24} b h^2$$

$$W_{y,d} = \frac{1}{12} b h^2$$

Prostý ohyb ve svislé rovině *xz*

Optimalizace rozměrů dřevěného ohýbaného nosníku z hraněného řeziva



Hledáme optimální poměr $b : h$ dřevěného průřezu.

$$W_y = \frac{1}{6} b\, h^2$$

$$d^2 = h^2 + b^2 \Rightarrow h^2 = d^2 - b^2$$

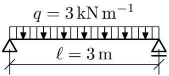
$$W_y(b) = \frac{1}{6} b(d^2 - b^2)$$
$$W_y(b) = \frac{1}{6}(b\, d^2 - b^3)$$

$$W_y'(b) = \frac{1}{6}(d^2 - 3\, b^2) = 0$$
$$d^2 - 3\, b^2 = 0$$
$$h^2 + b^2 - 3\, b^2 = 0$$
$$2b^2 = h^2$$
$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} h \doteq 0,7071\, h$$

Pro praktické aplikace se používá $\frac{b}{h} = \frac{5}{7} \doteq 0,7142$ nebo $\frac{b}{h} = \frac{7}{10} = 0,7$. **Závisí také na výrobním sortimentu!**

Prostý ohyb ve svislé rovině xz

Příklad



Pro dané zatížení navrhněte dřevěný trám obdélníkového průřezu. Uvažujte $\sigma_{dov} = 10\,\mathrm{MPa}$.

Ohybový momet uprostřed rozpětí:

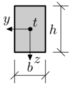
$$M_y = \frac{1}{8} q \ell^2 = \frac{1}{8}\,.\,3\,.\,3^2 = 3{,}375\,\mathrm{kNm}$$

Nutný průřezový modul a návrh průřezu:

$$W_y \geq \frac{M_y}{\sigma_{dov}} = \frac{3{,}375}{10.10^3} = 337{,}5.10^{-6}\,\mathrm{m}^3$$

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6}\,\frac{5}{7} h\, h^2 \geq 337{,}5.10^{-6}\,\mathrm{m}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ h \geq 0{,}141\,\mathrm{m} \ \Rightarrow\ b = \frac{5}{7} h \geq 0{,}101\,\mathrm{m}$$



NÁVRH h = 150 mm, b = 100 mm

Posouzení:

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6}\,.\,0{,}1\,.\,0{,}15^2 = 375.10^{-6}\,\mathrm{m}^3$$

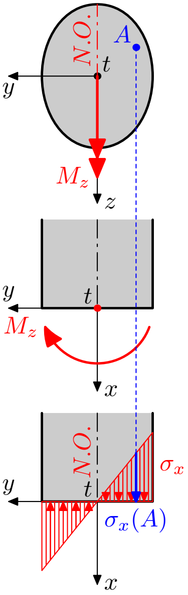
$$\sigma_{x,extr} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{3{,}375}{375.10^{-6}} = 9\,000\,\mathrm{kPa}$$

$$\sigma_{x,extr} = 9{,}0\,\mathrm{MPa} < \sigma_{dov} = 10\,\mathrm{MPa}$$

NÁVRH VYHOVUJE

Prostý ohyb ve vodorovné rovině *xy*

Normálové napětí v průřezu



Prostý ohyb ve vodorovné rovině:
$M_z \neq 0 \wedge N = M_x = M_y = V_y = V_z = 0$

Normálové napětí σ_x se určí pro každý bod průřezu:

$$\sigma_x(y) = -\frac{M_z}{I_z} y$$

Z podmínky $\sigma_x(y) = 0$ plyne, že N.O. tvoří přímo osa z.

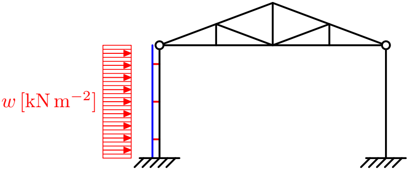
Průřezový modul W_z je definován analogicky jako W_y.

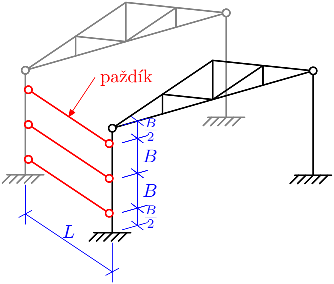
Podmínka spolehlivosti má tvar:

$$|\sigma_{x,extr}| = \frac{|M_z|}{W_z} \leq \sigma_{dov}$$

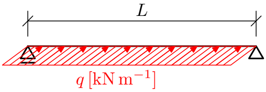
Prostý ohyb ve vodorovné rovině *xy*

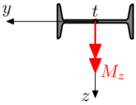
Příklad konstrukce - paždík





Paždík nese jen vodorovné zatížení od větru.





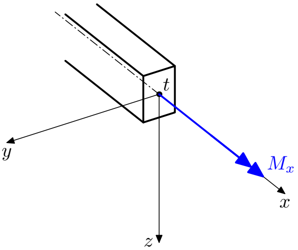
Zatížení na paždík:

$$q = w\,B$$

Ohybový moment na prostém nosníku:

$$M_z = \frac{1}{8} q\,L^2$$

Prosté kroucení

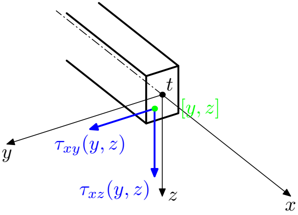


O prostém kroucení mluvíme v případě, že platí:

$$M_x \neq 0 \wedge N = M_y = M_z = V_y = V_z = 0$$

Podmínka ekvivalence:

$$M_x = \int_A (\tau_{xz}\, y - \tau_{xy}\, z)\, \mathrm{d}A$$

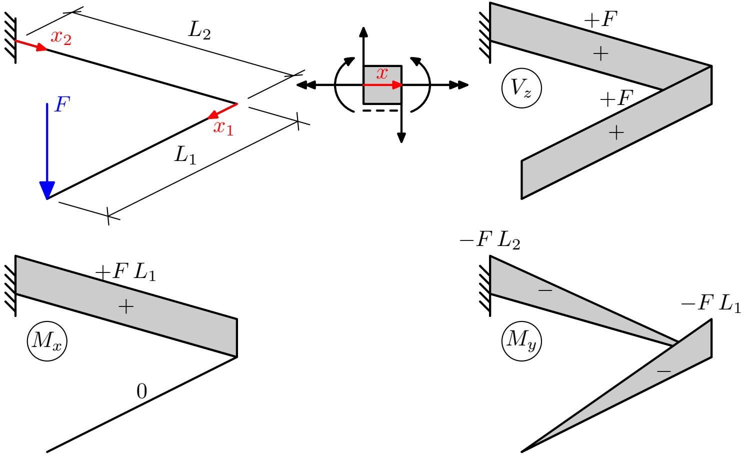


Kombinace namáhání řešíme superponováním (sečtením) jednotlivých případů pružnosti.

Osy y a z jsou VŽDY hlavní centrální osy setrvačnosti.

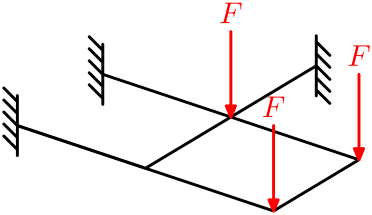
Typické konstrukce namáhané kroucením

Půdorysně zalomený nosník

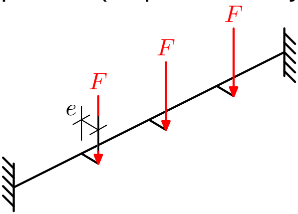


Typické konstrukce namáhané kroucením

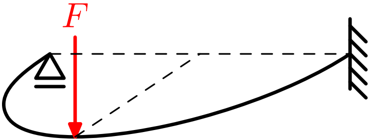
Rošty (balkonové nosníky)



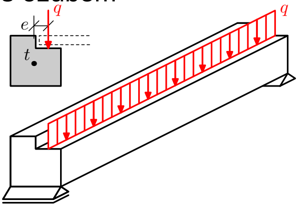
Nosníky zatížené mimo těžiště průřezu (resp. středu smyku)



Půdorysně zakřivené nosníky

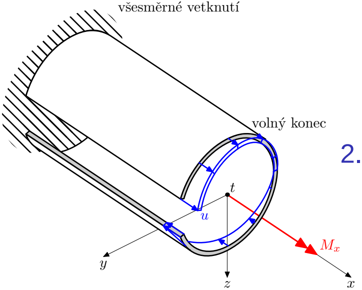


Prefabrikované nosníky s ozubem



Deplanace průřezu u kroucení

Deplanace průřezu při kroucení je posun bodu průřezu mimo jeho rovinu. Deformovaný průřez není rovinný.

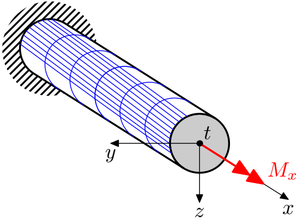


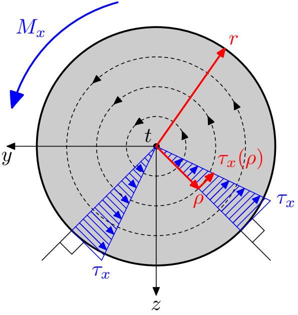
Potom rozlišujeme:

1. Volné kroucení - je-li deplanace volně umožněna (volný konec prutu) nebo u nedeplanujících průřezů. V průřezu vniká jen tečné napětí τ_x.
2. Vázané kroucení - je-li deplanace plně (vetknutí) nebo částečně (mezi průřezy ve vetknutí a volným koncem) omezena. V průřezu vniká jak tečné napětí τ_x, tak normálové napětí σ_x.

Řešení vázaného kroucení vede na složité diferenciální rovnice. Proto se u kroucení omezíme jen na vybrané průřezy.

Prosté kroucení kruhového průřezu





Kruhový průřez nedeplanuje.
U kruhového průřezu můžeme předpokládat vždy volné kroucení.

Tečné napětí τ_x lze určit jako

$$\tau_x(\rho) = \frac{M_x \, \rho}{I_p}$$

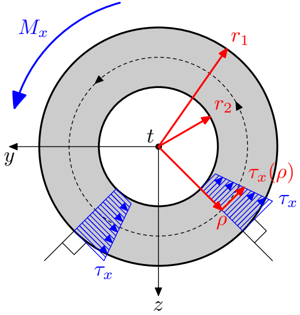
Směr τ_x je dán smykovými čarami, které jsou kružnice.

$I_p \ldots$ je polární moment setrvačnosti k těžišti
$I_p = I_y + I_z = \frac{1}{2}\pi r^4$

Maximální tečné napětí $\tau_{x,max}$ lze určit jako

$$\tau_{x,max} = \frac{M_x \, r}{I_p} \leq \tau_{dov}$$

Prosté kroucení masívního průřezu mezikruží



Průřez nedeplanuje.

Můžeme předpokládat vždy volné kroucení.

Tečné napětí τ_x lze určit jako

$$\tau_x(\rho) = \frac{M_x\,\rho}{I_p}$$

Směr τ_x je dán smykovými čarami, které jsou kružnice.

$I_p \ldots$ je polární moment setrvačnosti k těžišti

$I_p = I_y + I_z = \frac{1}{2}\pi(r_1^4 - r_2^4)$

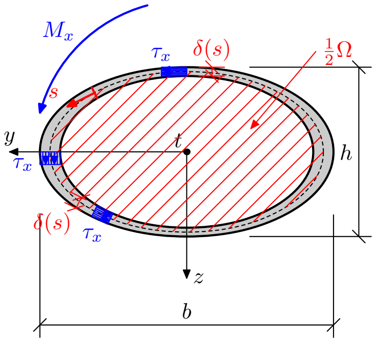
Maximální tečné napětí $\tau_{x,max}$ lze určit jako

$$\tau_{x,max} = \frac{M_x\,r_1}{I_p} \leq \tau_{dov}$$

Kroucení tenkostěnného uzavřeného průřezu

Bredtův vzorec

Pro tenkostěnné průřezy musí platit $\delta \ll b$ a $\delta \ll h$.



s…je souřadnice po obvodu průřezu

$\delta(s)$…tloušťka stěny průřezu

Ω…dvojnásobek opsané plochy střednicí stěny průřezu

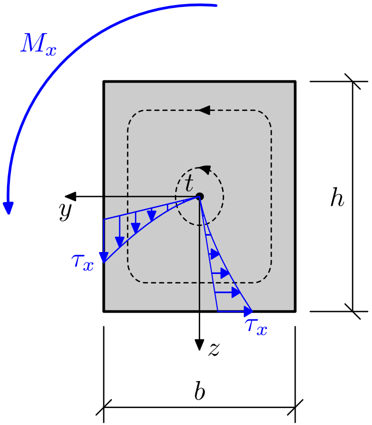
t…smykový tok, v průřezu se předpokládá konstantní, $t = \frac{M_x}{\Omega}$

τ_x…se předpokládá po tloušťce $\delta(s)$ konstantní

Bredtův vzorec:

$$\tau_x(s) = \frac{M_x}{\Omega\,\delta(s)} = \frac{t}{\delta(s)}$$

Prosté kroucení masívního obdélníkového průřezu



Průřez deplanuje!

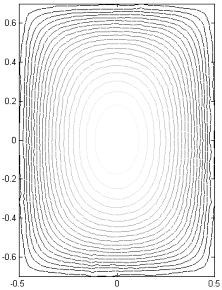
Pro výpočet τ_x se používají přibližné vzorce nebo složité diferenciální výpočty.

Směr τ_x je dán smykovými čarami.

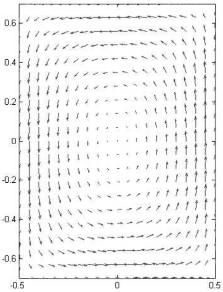
Se vzdáleností od těžiště *t* se τ_x nemění lineárně, ale po křivce.

Prosté kroucení masivního obdélníkového průřezu

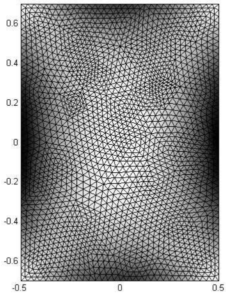
Příklad průběhu tečných napětí τ_x učených metodou konečných prvků (MKP)



Smykové čáry (větší hustota čar odpovídá větší hodnotě τ_x)



Vektory $\tau_x = (\tau_{xy}, \tau_{xz})$ v obdélníkovém průřezu



Síť konečných prvků a velikost τ_x (tmavší odstín odpovídá větší hodnotě napětí)

Prosté kroucení masivního obdélníkového průřezu

Extrém určený pomocí tabulky

Extrém tečného napětí $\tau_{x,extr}$ lze za předpokladu $b \leq h$ určit na základě součinitele β z tabulky podle výrazu:

$$\tau_{x,extr} = \frac{M_x}{\beta h b^2}$$

h/b	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00
β	0,208	0,219	0,231	0,239	0,246

h/b	2,50	3,00	5,00	10,00	∞
β	0,258	0,267	0,291	0,313	$1/3$

Mezilehlé hodnoty lze interpolovat.

Kontrolní otázka

Předpoklad, že průřez ohýbaného nosníku zůstává po deformaci rovinný a kolmý na průhybovou čáru, nazýváme:

a) Schwedlerova věta

b) Steinerova věta

c) Bernoulli-Navierova hypotéza

Kontrolní otázka

Pevnost malty v tahu za ohybu se zkouší na trámečcích průřezu 40 x 40 mm a délky 160 mm. Trámeček se umístí na podpory ve vzdálenosti 100 mm. Zatěžuje se sílou uprostřed rozpětí. Jestliže dojde k porušení vzorku při působící síle 640 N, potom je pevnost v tahu za ohybu rovna:

a) $1{,}5\,\mathrm{MPa}$

b) $2{,}4\,\mathrm{MPa}$

c) $0{,}75\,\mathrm{MPa}$

Kontrolní otázka

Deplanace průřezu je jev, pro který platí:

a) Nastává při kroucení prutu, kdy průřez po deformaci zůstává rovinný.

b) Nastává při kroucení prutu, kdy průřez po deformaci nezůstane rovinný.

c) Projevuje se u ohybu, kdy průřez po deformaci zůstává rovinný a kolmý na průhybovou čáru ohýbaného nosníku.

Konec přednášky

Děkuji za pozornost.

Vysázeno systémem LaTeX.
Obrázky vytvořeny v systému METAPOST.