

Statika 2

1. přednáška

Prosté případy pružnosti:

Prostý ohyb

Prosté kroucení vybraných průřezů

Miroslav Vokáč

`miroslav.vokac@cvut.cz`

ČVUT v Praze, Fakulta architektury

2. října 2017

Konzultační hodiny

Ing. Miroslav Vokáč, Ph.D.

Klonerův ústav, ČVUT v Praze
Šolínova 7
166 08 Praha 6 - Dejvice

Konzultační hodiny: *Pondělí 14 - 15 hod. v TH9:508*

Tel.: 224 353 509

E-mail: miroslav.vokac@cvut.cz

URL: <http://15122.fa.cvut.cz>

Podmínky k udělení zápočtu ze Statiky II:

1. Docházka na cvičení min. 80 %.
2. Každý student navštěvuje cvičení, kde je zapsán v KOSu. Přesun není možný.
3. Odevzdané a správně vypracované domácí úkoly (celkem 6 úkolů).
4. Termín pro odevzdání domácího cvičení je 14 dní od jeho zadání (viz také harmonogram na <http://15122.fa.cvut.cz>).
5. Uzavření udělování zápočtů v zimním semestru 2017/2018 je 2. 2. 2018.

Zkouška ze Statiky II:

- ▶ Dle Studijního a zkušebního řádu ČVUT v Praze má každý student 1 řádný a nejvýše 2 opravné termíny, viz SZŘ, čl. 10, odst. 4. Další opravná zkouška je dle SZŘ nepřipustná.
- ▶ Podmínkou přihlášení je udělený zápočet ze Statiky II.
- ▶ Odhlášení ze zkoušky 3 dny před termínem zkoušky.
- ▶ Neomluvená nepřítomnost je klasifikována F.
- ▶ Ve zkuškovém období budou termíny zkoušky v pondělí a ve čtvrtek.
- ▶ V březnu budou 2 termíny, které budou v KOSu otevřené jen pro opravy. První termín je nutné vyčerpat ve zkuškovém období!
- ▶ Pro zimní semestr 2017/2018 je poslední den pro konání zkoušky dle rozhodnutí děkana 16. 3. 2018.

Organizace výuky

Zkouška ze Statiky II: Písemná část obsahuje 4 části:

1. Test – teoretické otázky ze Statiky I a Statiky II.
2. Vnitřní síly na staticky určité soustavě.
3. Příklad na prosté případy pružnosti.
4. Příklad na ostatní úlohy z pružnosti a pevnosti.

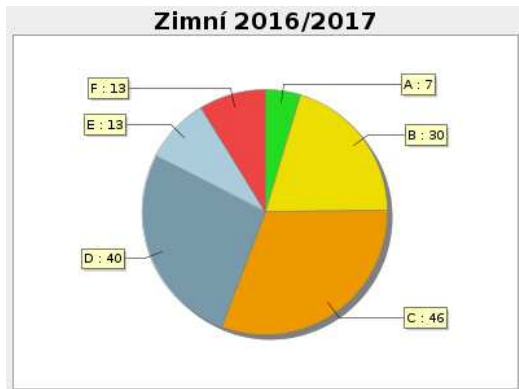
Pomůcky ke zkouškové písemce:

- ▶ Kalkulačka, čisté listy papíru, psací potřeby.
- ▶ Výpis důležitých vzorců libovolného zpracování (psaný text, tiskárna PC, Xerox,...). Omezen je formát papíru na 1 list A4. Tato pomůcka není povolena při Testu.

Organizace výuky

Statistika výsledků klasifikace STATIKA II v roce 2017/2018:

- ▶ Zapsáno studentů na předmět: 168
- ▶ Neuděleno zápočtů: 13
- ▶ Uděleno zápočtů: 151
- ▶ Úspěšně dokončilo předmět: 136
- ▶ Na zkoušku se dostavilo 149 studentů s výsledkem:

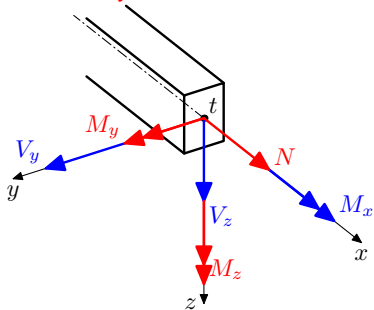


Doporučená literatura

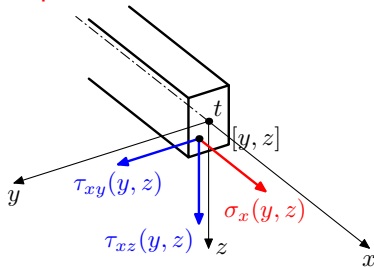
- ▶ Radmila Vondrová. *Statika II. Příklady*. Praha : ČVUT, 2005. ISBN 80-01-03289-2.
- ▶ Tadeusz Kolendowicz. *Stavební mechanika pro architekty*. Přeložil doc. Ing. Jiří Muk, CSc. Praha : SNTL, 1984. 290s.
- ▶ Dvořák Jiří. *Stavební mechanika*. Praha : SOBOTÁLES, 1994. ISBN 80-901570-7-6.
- ▶ Hibbeler, R. C. *Structural analysis*. Boston : Prentice hall, 2009. ISBN 0-13-257053-X.
- ▶ Puchmajer, P.; Řezníčková, J. *Sbírka úloh z pružnosti a pevnosti*. Praha : ČVUT, 2002. ISBN 80-01-02448-2.
- ▶ Hořejší, J.; Šafka, J. a kol. *Statické tabulky*. Technický průvodce, svazek 51. Praha : SNTL, 1987.
- ▶ Žák, J., Pěňčík, J. *Stavební mechanika, statika, pružnost a pevnost*. Antikva, 2005. ISBN 80-239-4965-9.

Vnitřní síly a napětí v průřezu

Vnitřní síly



Napětí



- ▶ Osy y a z jsou hlavní těžišťové osy setrvačnosti průřezu.
- ▶ **Normálové napětí** σ – při působení N , M_y , M_z (a M_x).
- ▶ **Tečné napětí** τ – při působení V_y , V_z , M_x .

Prosté případy pružnosti

U prostých případů pružnosti je v průřezu jen jedna vnitřní síla nenulová.

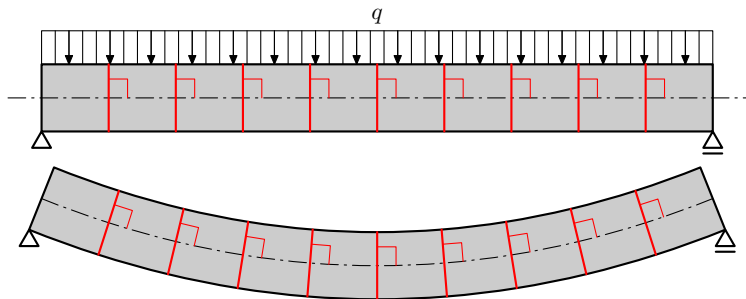
Prosté případy pružnosti:

- ▶ **Prostý tah & tlak** – viz Statika I.
- ▶ **Prostý smyk** – viz Statika I.
- ▶ **Prosté kroucení.**
- ▶ **Prostý ohyb.**

Na <http://15122.fa.cvut.cz> lze na stránkách Statiky I nalézt výklad pro úvod k prostým případům pružnosti, napětí v průřezu, vnitřní síly, hlavní těžišťové osy setrvačnosti, momenty setrvačnosti atd.

Prostý ohyb

Bernoulli-Navierova hypotéza

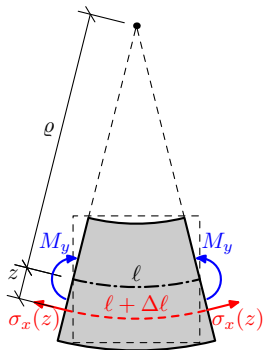


Bernoulli-Navierova hypotéza: Průřez ohýbaného nosníku zůstává po deformaci rovinný a kolmý na průhybovou čáru.

Z Bernoulli-Navierovy hypotézy a ze základních rovnic pružnosti lze odvodit vztahy pro prostý ohyb, které si budeme uvádět.

Prostý ohyb

Odvození vztahu pro křivost



Předpokládejme prut ohýbaný konstantním ohybovým momentem M_y .

Pro $\varepsilon(z)$ lze odvodit z podobnosti kruhových výsečí:

$$\frac{l}{l+\Delta l} = \frac{1}{1+\varepsilon(z)} = \frac{\rho}{\rho+z} \Rightarrow \varepsilon(z) = \frac{z}{\rho}$$

Dosazením do Hookeova zákona získáme: $\sigma(z) = E\varepsilon(z) = E\frac{z}{\rho}$

Dosazením do podmínky ekvivalence:

$$M_y = \int_A \sigma(z) z \, dA = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 \, dA$$

Proto můžeme vyjádřit:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y}$$

$\frac{1}{\rho}$... je křivost

EI_y ... je ohybová tuhost průřezu

Organizace výuky

Prosté případy pružnosti

Prostý ohyb

Prosté kroucení

Kontrolní otázky

Prostý ohyb

Odvození vztahu pro σ_x u prostého ohybu

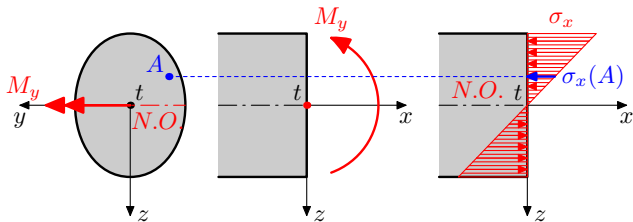
Křivost: $\frac{1}{\rho} = \frac{M_y}{EI_y}$

Dosadíme vztah $\varepsilon(z) = \frac{z}{\rho} \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon(z)}{z}$, potom: $\frac{\varepsilon(z)}{z} = \frac{M_y}{EI_y}$

Po dosažení Hookeova zákona $\sigma_x(z) = E\varepsilon(z) \Rightarrow \varepsilon(z) = \frac{\sigma_x(z)}{E}$
získáme: $\frac{\sigma_x(z)}{Ez} = \frac{M_y}{EI_y}$

Odtud plyne vztah:

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} z$$



Organizace výuky

Prosté případy
pružnosti

Prostý ohyb

Prosté kroucení

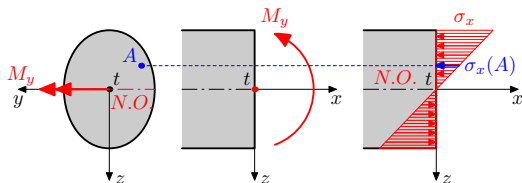
Kontrolní otázky

Prostý ohyb ve svislé rovině xz

Normálové napětí v průřezu

Prostý ohyb ve svislé rovině:

$$M_y \neq 0 \wedge N = M_x = M_z = V_y = V_z = 0$$



Normálové napětí σ_x se určí pro každý bod průřezu:

$$\sigma_x(z) = \frac{M_y}{I_y} z$$

Neutrální osa (N.O.) je množina bodů s nulovou hodnotou normálového napětí a rozděluje průřez na taženou a tlačnou oblast. Z podmínky $\sigma_x(z) = 0$ plyne, že N.O. tvoří přímo osa y . Extrémní normálové napětí je v bodu nejvíce vzdáleném od N.O.

Organizace výuky

Prosté případy
pružnosti

Prostý ohyb

Prosté kroucení

Kontrolní otázky

Prostý ohyb ve svislé rovině xz

Podmínka spolehlivosti a průřezový modul

Podmínka spolehlivosti podle dovolených namáhání:

$$|\sigma_{x,extr}| = \frac{|M_y|}{W_y} \leq \sigma_{dov}$$

W_y ... je **průřezový modul** (modul průřezu), uvažuje se jako kladné číslo, základní jednotka je m^3

$$W_y = \frac{I_y}{\max(z_d, |z_h|)}$$

Je-li vzdálenost těžiště k dolním z_d a horním vláknům $|z_h|$ odlišná, potom se někdy také rozlišuje:

$$W_{y,d} = \frac{I_y}{z_d}$$

a

$$W_{y,h} = \frac{I_y}{|z_h|}$$

Organizace výuky

Prosté případy
pružnosti

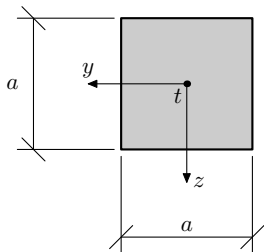
Prostý ohyb

Prosté kroucení

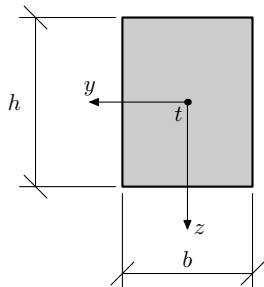
Kontrolní otázky

Prostý ohyb ve svislé rovině xz

Průřezový modul některých základních průřezů



$$W_y = \frac{1}{6} a^3$$



$$W_y = \frac{1}{6} b h^2$$

Organizace výuky

Prosté případy
pružnosti

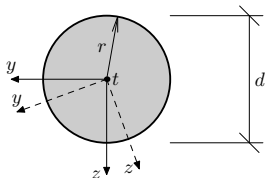
Prostý ohyb

Prosté kroucení

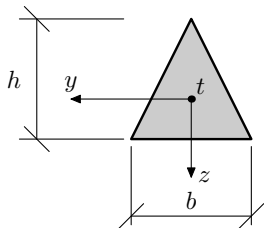
Kontrolní otázky

Prostý ohyb ve svislé rovině xz

Průřezový modul některých základních průřezů



$$W_y = \frac{1}{4} \pi r^3 = \frac{1}{32} \pi d^3$$



$$W_{y,h} = \frac{1}{24} b h^2$$

$$W_{y,d} = \frac{1}{12} b h^2$$

Organizace výuky

Prosté případy
pružnosti

Prostý ohyb

Prosté kroucení

Kontrolní otázky

Prostý ohyb ve svislé rovině xz

Optimalizace rozměrů dřevěného ohýbaného nosníku z hraněného řeziva

Hledáme optimální poměr $b : h$ dřevěného průřezu.

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2$$

$$d^2 = h^2 + b^2 \Rightarrow h^2 = d^2 - b^2$$

$$W_y(b) = \frac{1}{6} b (d^2 - b^2)$$

$$W_y(b) = \frac{1}{6} (b d^2 - b^3)$$

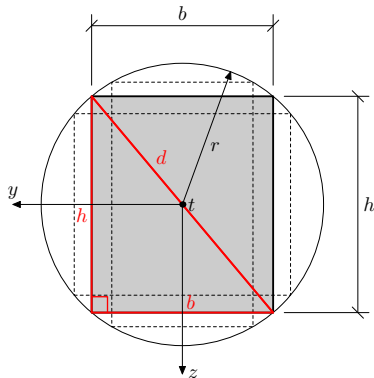
$$W'_y(b) = \frac{1}{6} (d^2 - 3b^2) = 0$$

$$d^2 - 3b^2 = 0$$

$$h^2 + b^2 - 3b^2 = 0$$

$$2b^2 = h^2$$

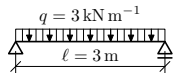
$$b = \frac{\sqrt{2}}{2} h \doteq 0,7071 h$$



Pro praktické aplikace se používá $\frac{b}{h} = \frac{5}{7} \doteq 0,7142$ nebo $\frac{b}{h} = \frac{7}{10} = 0,7$. **Závisí také na výrobním sortimentu!**

Prostý ohyb ve svislé rovině xz

Příklad



Pro dané zatížení navrhnete dřevěný trám obdélníkového průřezu. Uvažujte $\sigma_{dov} = 10 \text{ MPa}$.

Ohybový moment uprostřed rozpětí:

$$M_y = \frac{1}{8} q \ell^2 = \frac{1}{8} \cdot 3 \cdot 3^2 = 3,375 \text{ kNm}$$

Nutný průřezový modul a návrh průřezu:

$$W_y \geq \frac{M_y}{\sigma_{dov}} = \frac{3,375}{10 \cdot 10^3} = 337,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \frac{5}{7} h h^2 \geq 337,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h \geq 0,141 \text{ m} \Rightarrow b = \frac{5}{7} h \geq 0,101 \text{ m}$$



NÁVRH h = 150 mm, b = 100 mm

Posouzení:

$$W_y = \frac{1}{6} b h^2 = \frac{1}{6} \cdot 0,1 \cdot 0,15^2 = 375 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3$$

$$\sigma_{x,extr} = \frac{M_y}{W_y} = \frac{3,375}{375 \cdot 10^{-6}} = 9000 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{x,extr} = 9,0 \text{ MPa} < \sigma_{dov} = 10 \text{ MPa}$$

NÁVRH VYHOVUJE

Organizace výuky

Prosté případy
pružnosti

Prostý ohyb

Prosté kroucení

Kontrolní otázky

Prostý ohyb ve vodorovné rovině xy

Normálové napětí v průřezu

Prostý ohyb ve vodorovné rovině:

$$M_z \neq 0 \wedge N = M_x = M_y = V_y = V_z = 0$$

Normálové napětí σ_x se určí pro každý bod průřezu:

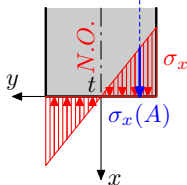
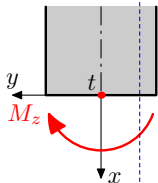
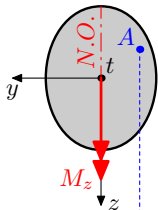
$$\sigma_x(y) = -\frac{M_z}{I_z} y$$

Z podmínky $\sigma_x(y) = 0$ plyne, že N.O. tvoří přímo osa z.

Průřezový modul W_z je definován analogicky jako W_y .

Podmínka spolehlivosti má tvar:

$$|\sigma_{x,extr}| = \frac{|M_z|}{W_z} \leq \sigma_{dov}$$



Organizace výuky

Prosté případy
pružnosti

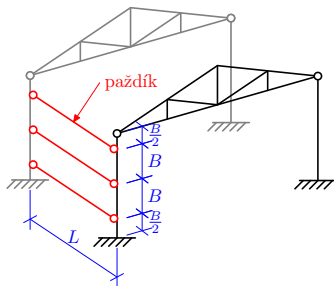
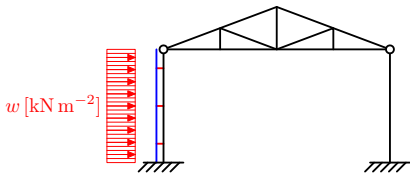
Prostý ohyb

Prosté kroucení

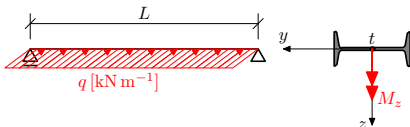
Kontrolní otázky

Prostý ohyb ve vodorovné rovině xy

Příklad konstrukce - paždík



Paždík nese jen vodorovné zatížení od větru.



Zatížení na paždík:

$$q = w B$$

Ohybový moment na prostém nosníku:

$$M_z = \frac{1}{8} q L^2$$

Organizace výuky

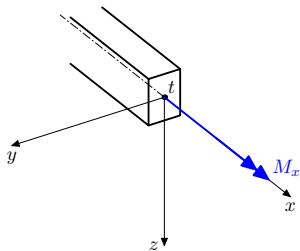
Prosté případy pružnosti

Prostý ohyb

Prosté kroucení

Kontrolní otázky

Prosté kroucení

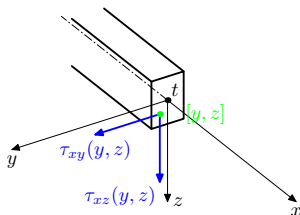


O prostém kroucení mluvíme
v případě, že platí:

$$M_x \neq 0 \wedge N = M_y = M_z = V_y = V_z = 0$$

Podmínka ekvivalence:

$$M_x = \int_A (\tau_{xz} y - \tau_{xy} z) dA$$

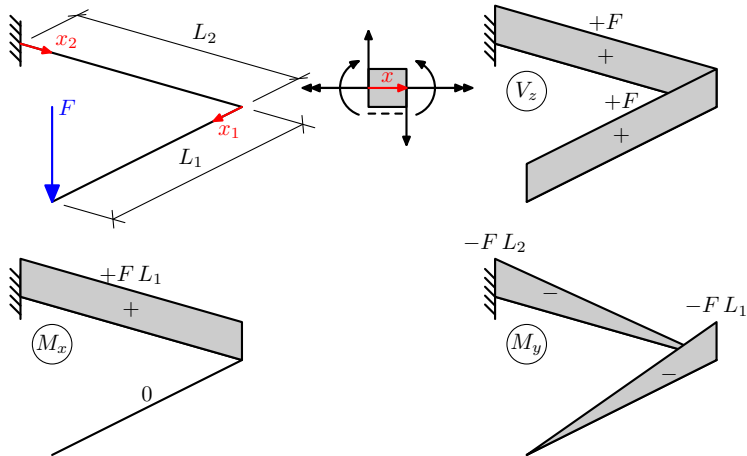


Kombinace namáhání řešíme
superponováním (sečtením)
jednotlivých případů pružnosti.

Osy y a z jsou VŽDY hlavní centrální osy setrvačnosti.

Typické konstrukce namáhané kroucením

Půdorysně zalomený nosník



Organizace výuky

Prosté případy
pružnosti

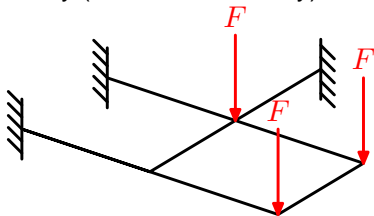
Prostý ohyb

Prosté kroucení

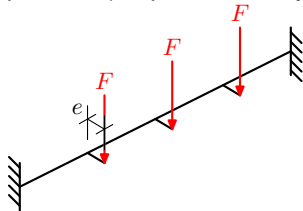
Kontrolní otázky

Typické konstrukce namáhané kroucením

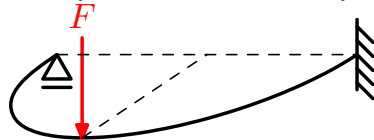
Rošty (balkonové nosníky)



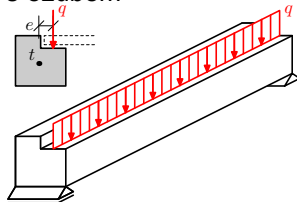
Nosníky zatížené mimo těžiště průřezu (resp. středu smyku)



Půdorysně zakřivené nosníky



Prefabrikované nosníky s ozubem



Organizace výuky

Prosté případy
pružnosti

Prostý ohyb

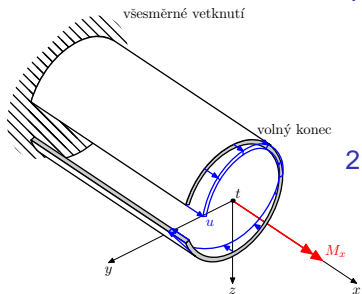
Prosté kroucení

Kontrolní otázky

Deplanace průřezu u kroucení

Deplanace průřezu při kroucení je posun bodu průřezu mimo jeho rovinu. Deformovaný průřez není rovinný.

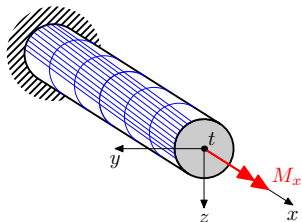
Potom rozlišujeme:



1. **Volné kroucení** - je-li deplanace volně umožněna (volný konec prutu) nebo u nedeplanujících průřezů. V průřezu vniká jen tečné napětí τ_x .
2. **Vázané kroucení** - je-li deplanace plně (vetknutí) nebo částečně (mezi průřezy ve vetknutí a volným koncem) omezena. V průřezu vniká jak tečné napětí τ_x , tak normálové napětí σ_x .

Řešení vázaného kroucení vede na složité diferenciální rovnice. Proto se u kroucení omezíme jen na vybrané průřezy.

Prosté kroucení kruhového průřezu



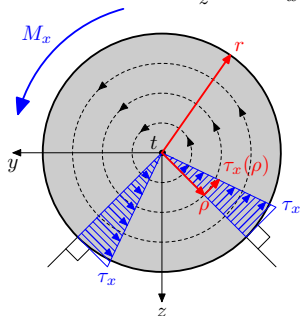
Kruhový průřez nedeplanuje.

U kruhového průřezu můžeme předpokládat vždy volné kroucení.

Tečné napětí τ_x lze určit jako

$$\tau_x(\rho) = \frac{M_x \rho}{I_p}$$

Směr τ_x je dán smykovými čarami, které jsou kružnice.



I_p ... je polární moment setrvačnosti k těžišti

$$I_p = I_y + I_z = \frac{1}{2} \pi r^4$$

Maximální tečné napětí $\tau_{x,max}$ lze určit jako

$$\tau_{x,max} = \frac{M_x r}{I_p} \leq \tau_{dov}$$

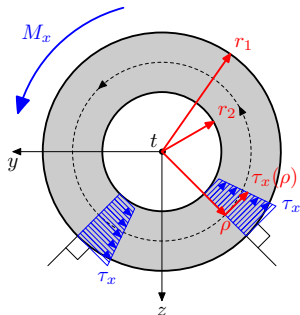
Prosté kroucení masivního průřezu mezikruží

Průřez nedeplánuje.

Můžeme předpokládat vždy volné kroucení.

Tečné napětí τ_x lze určit jako

$$\tau_x(\rho) = \frac{M_x \rho}{I_p}$$



Směr τ_x je dán smykovými čarami, které jsou kružnice.

$I_p \dots$ je polární moment setrvačnosti k těžišti

$$I_p = I_y + I_z = \frac{1}{2} \pi (r_1^4 - r_2^4)$$

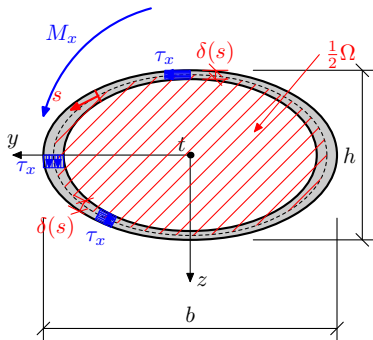
Maximální tečné napětí $\tau_{x,max}$ lze určit jako

$$\tau_{x,max} = \frac{M_x r_1}{I_p} \leq \tau_{dov}$$

Kroucení tenkostěnného uzavřeného průřezu

Bredtův vzorec

Pro tenkostěnné průřezy musí platit $\delta \ll b$ a $\delta \ll h$.



s ... je souřadnice po obvodu průřezu

$\delta(s)$... tloušťka stěny průřezu

Ω ... dvojnásobek opsané plochy střednicí stěny průřezu

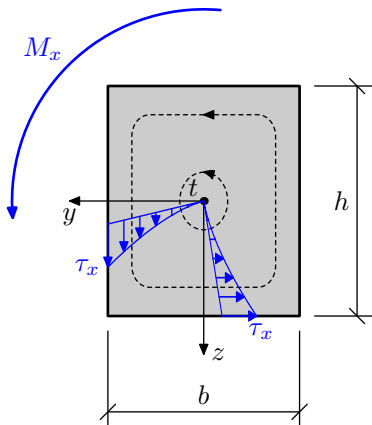
t ... smykový tok, v průřezu se předpokládá konstantní, $t = \frac{M_x}{\Omega}$

τ_x ... se předpokládá po tloušťce $\delta(s)$ konstantní

Bredtův vzorec:

$$\tau_x(s) = \frac{M_x}{\Omega \delta(s)} = \frac{t}{\delta(s)}$$

Prosté kroucení masivního obdélníkového průřezu



Průřez deplakuje!

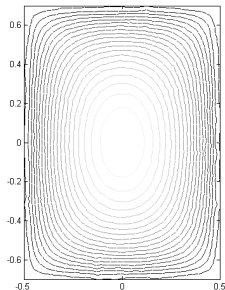
Pro výpočet τ_x se používají přibližné vzorce nebo složité diferenciální výpočty.

Směr τ_x je dán smykovými čarami.

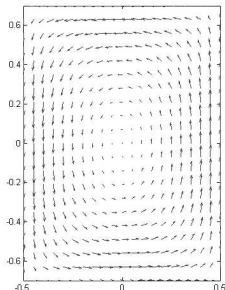
Se vzdáleností od těžiště t se τ_x nemění lineárně, ale po křivce.

Prosté kroucení masivního obdélníkového průřezu

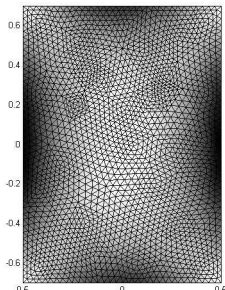
Příklad průběhu tečných napětí τ_x učených metodou konečných prvků (MKP)



Smykové čáry
(větší hustota čar
odpovídá větší
hodnotě τ_x)



Vektory
 $\tau_x = (\tau_{xy}, \tau_{xz})$
v obdélníkovém
průřezu



Sít konečných
prvků a velikost τ_x
(tmavší odstín
odpovídá větší
hodnotě napětí)

Prosté kroucení masivního obdélníkového průřezu

Extrém určený pomocí tabulky

Extrém tečného napětí $\tau_{x,extr}$ lze za předpokladu $b \leq h$ určit na základě součinitele β z tabulky podle výrazu:

$$\tau_{x,extr} = \frac{M_x}{\beta h b^2}$$

h/b	1,00	1,20	1,50	1,75	2,00
β	0,208	0,219	0,231	0,239	0,246

h/b	2,50	3,00	5,00	10,00	∞
β	0,258	0,267	0,291	0,313	1/3

Mezilehlé hodnoty lze interpolovat.

Předpoklad, že průřez ohýbaného nosníku zůstává po deformaci rovinný a kolmý na průhybovou čáru, nazýváme:

- a) Schwedlerova věta
- b) Steinerova věta
- c) Bernoulli-Navierova hypotéza

Kontrolní otázka

Trámový strop má osové vzdálenosti trámů 1,1 m. Zatížení stropní konstrukce je $3,0 \text{ kN/m}^2$. Zatížení jednoho trámu je potom rovno:

- a) $2,73 \text{ kN/m}$
- b) $1,65 \text{ kN/m}$
- c) $3,30 \text{ kN/m}$

Pevnost malty v tahu za ohybu se zkouší na trámečcích průřezu 40×40 mm a délky 160 mm. Trámeček se umístí na podpory ve vzdálenosti 100 mm. Zatěžuje se silou uprostřed rozpětí. Jestliže dojde k porušení vzorku při působící síle 640 N, potom je pevnost v tahu za ohybu rovna:

- a) 1,5 MPa
- b) 2,4 MPa
- c) 0,75 MPa

Deplanace průřezu je jev, pro který platí:

- a) Nastává při kroucení prutu, kdy průřez po deformaci zůstává rovinný.
- b) Nastává při kroucení prutu, kdy průřez po deformaci nezůstane rovinný.
- c) Projevuje se u ohybu, kdy průřez po deformaci zůstává rovinný a kolmý na průhybovou čáru ohýbaného nosníku.

Děkuji za pozornost.

Vysázeno systémem \LaTeX .

Obrázky vytvořeny v systému METAPOST.