

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

 $M_y + N$

Kombinace namáhání

 $M_z + N$

Kombinace namáhání

 $M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za

vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Statika 2

2. přednáška

Kombinace namáhání $N + M_y + M_z$

Jádro průřezu

Miroslav Vokáč

`miroslav.vokac@cvut.cz`

ČVUT v Praze, Fakulta architektury

19. října 2016

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za
vyloučeného tahu

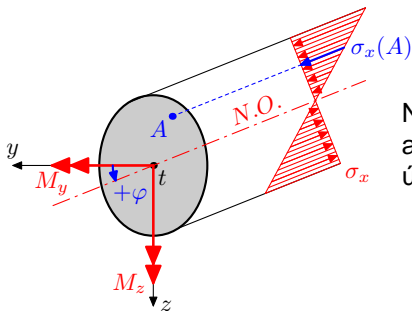
Kontrolní otázky

- ▶ Při kombinaci namáhání je počet nenulových vnitřních sil větší než 1.
- ▶ Napětí je možné pro každou vnitřní sílu vyjádřit zvlášť a výsledek superponovat, tj. sečíst.
- ▶ Zaměříme se hlavně na kombinace s vnitřními silami N , M_y a M_z , od kterých vzniká v průřezu normálové napětí σ_x .

Šikmý ohyb

Normálové napětí v průřezu

$$M_y \neq 0 \wedge M_z \neq 0 \wedge N = 0$$



Normálové napětí:

$$\sigma_x(y, z) = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y$$

N.O. prochází těžištěm
a z rovnice $\sigma_x(y, z) = 0$ se určí
úhel natočení φ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z}{y} = \frac{M_z I_y}{I_z M_y}$$

Osy y a z jsou hlavní těžišťové
osy setrvačnosti.

Extrémní normálové napětí je
v bodu nejvíce vzdáleném od
N.O. Musí platit $\sigma_{x,extr} \leq \sigma_{dov}$.

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

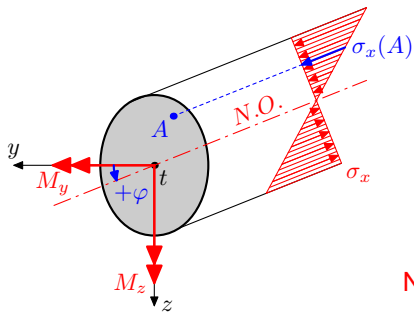
Excentrický tlak za

vyloženého tahu

Kontrolní otázky

Šikmý ohyb

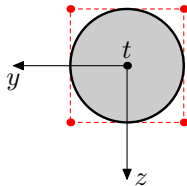
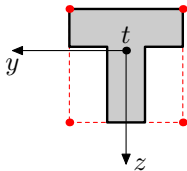
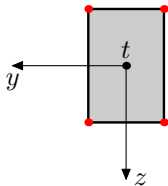
Použití průřezových modulů



POZOR! VZOREC

$$\sigma_{x,extr} = \pm \frac{M_y}{W_y} \pm \frac{M_z}{W_z}$$

NEMÁ OBEČNOU PLATNOST!



Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za

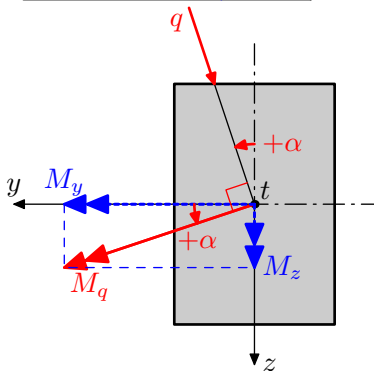
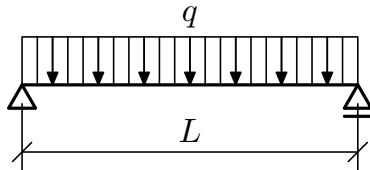
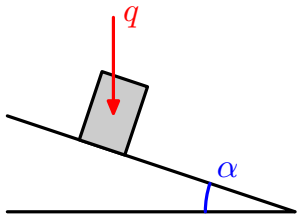
vyločeného tahu

Kontrolní otázky

Šikmý ohyb

Typické konstrukce namáhané šikmým ohybem

Vaznice



Ohybové momenty uprostřed rozpětí:

$$M_q = \frac{1}{8} q L^2$$

$$M_y = M_q \cos \alpha$$

$$M_z = M_q \sin \alpha$$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za

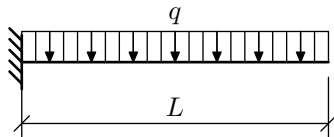
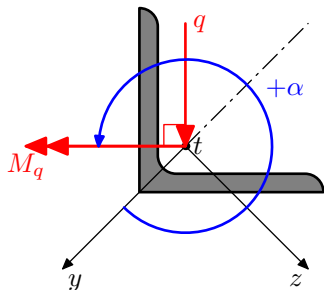
vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Šikmý ohyb

Typické konstrukce namáhané šikmým ohybem

Průřez nemá svislou hlavní těžišťovou osu setrvačnosti



Ohybové momenty ve vetknutí:

$$M_q = -\frac{1}{2} q L^2$$

$$M_y = M_q \cos \alpha$$

$$M_z = M_q \sin \alpha$$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za

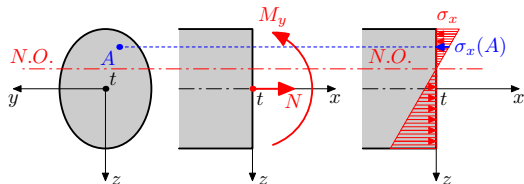
vyloženého tahu

Kontrolní otázky

Kombinace namáhání $M_y + N$

Normálové napětí v průřezu

$$M_y \neq 0 \wedge M_z = 0 \wedge N \neq 0$$



Normálové napětí σ_x se určí pro každý bod průřezu:

$$\sigma_x(z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z$$

N.O. z podmínky $\sigma_x(z) = 0$ je dána rovnicí přímky: $z = -\frac{N}{A} \frac{I_y}{M_y}$.

Extrémní normálové napětí je v bodu nejvíce vzdáleném od N.O. Musí platit $\sigma_{x,extr} \leq \sigma_{dov}$.

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

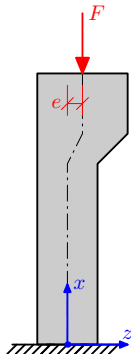
Excentrický tlak za

vyloženého tahu

Kontrolní otázky

Kombinace namáhání $M_y + N$

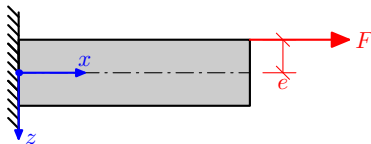
Příklady



Vnitřní síly ve vetknutí:

$$N = -F$$

$$M_y = -F e$$



Vnitřní síly na celé délce prutu:

$$N = +F$$

$$M_y = -F e$$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

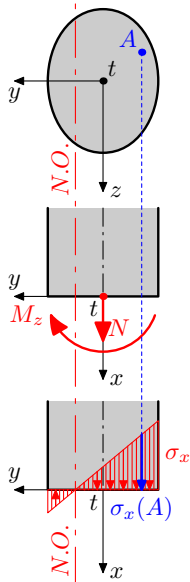
Excentrický tlak za

vyloženého tahu

Kontrolní otázky

Kombinace namáhání $M_z + N$

Normálové napětí v průřezu



$$M_y = 0 \wedge M_z \neq 0 \wedge N \neq 0$$

Normálové napětí σ_x se určí pro každý bod průřezu:

$$\sigma_x(z) = \frac{N}{A} - \frac{M_z}{I_z} y$$

N.O. z podmínky $\sigma_x(z) = 0$ je dána rovnicí přímky:

$$y = + \frac{N}{A} \frac{I_z}{M_z}$$

Extrémní normálové napětí je v bodu nejvíce vzdáleném od N.O. Musí platit $\sigma_{x,extr} \leq \sigma_{dov}$.

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za

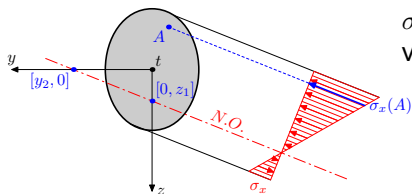
vyloženého tahu

Kontrolní otázky

Kombinace namáhání $M_y + M_z + N$

Normálové napětí v průřezu

$$M_y \neq 0 \wedge M_z \neq 0 \wedge N \neq 0$$



N.O. je dána podmínkou $\sigma_x(y, z) = 0$, tj. obecná přímka v rovině yz :

$$\frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y = 0$$

Osy y a z jsou hlavní těžišťové osy setrvačnosti.

Normálové napětí:

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y$$

Obvykle volíme $y_1 = 0$ a dopočteme z_1 , dále volíme $z_2 = 0$ a dopočteme y_2 . Těmito body proložíme přímku.

Extrémní normálové napětí je v bodu nejvíce vzdáleném od N.O. Musí platit $\sigma_{x,extr} \leq \sigma_{dov}$.

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za

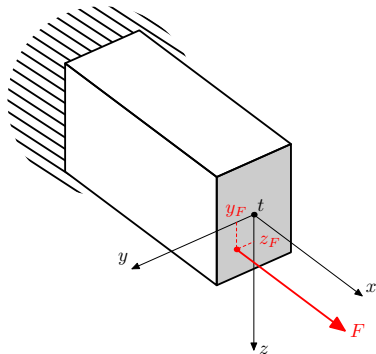
vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Kombinace namáhání $M_y + M_z + N$

Příklady

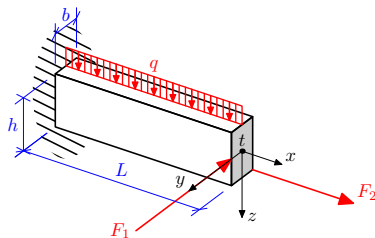
Excentrická osová síla
F je tahová!



Po celé délce prutu platí:

$$\begin{aligned} N &= +F \\ M_y &= +F z_F \\ M_z &= -F y_F \end{aligned}$$

Příklad obecné kombinace
zátížení:



Vnitřní síly ve vetknutí:

$$\begin{aligned} N &= +F_2 \\ M_y &= -\frac{1}{2} q L^2 + F_2 \frac{h}{2} \\ M_z &= -F_1 L + F_2 \frac{b}{2} \end{aligned}$$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

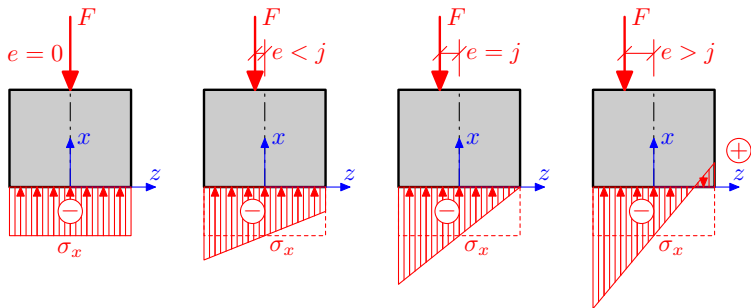
Excentrický tlak za

vyloženého tahu

Kontrolní otázky

Jádro průřezu

Průběh σ_x od tlakové síly v průřezu závisí na její excentricitě k těžišti:



Jádro průřezu je oblast průřezu pro kterou platí:

Je-li působí tlakové síly v jádře průřezu, je celý průřez tlačěn a v průřezu nevzniká tahové napětí.

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

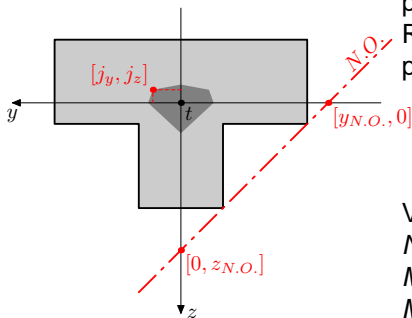
Excentrický tlak za

vyloženého tahu

Kontrolní otázka

Jádro průřezu

Určení bodu na hranici jádra průřezu



N.O. musí být na hranici průřezu.

Rovnice přímky N.O. je dána předpisem:

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y = 0$$

Vnitřní síly je možné zapsat:

$$N = -F \quad (F \text{ je tlaková})$$

$$M_y = -F j_z$$

$$M_z = +F j_y$$

Po dosazení souřadnic dvou bodů $[0, z_{N.O.}]$ a $[y_{N.O.}, 0]$ lze odvodit:

$$j_z = -\frac{I_y}{A z_{N.O.}} = -\frac{i_y^2}{z_{N.O.}}$$

$$a \quad j_y = -\frac{I_z}{A y_{N.O.}} = -\frac{i_z^2}{y_{N.O.}}$$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

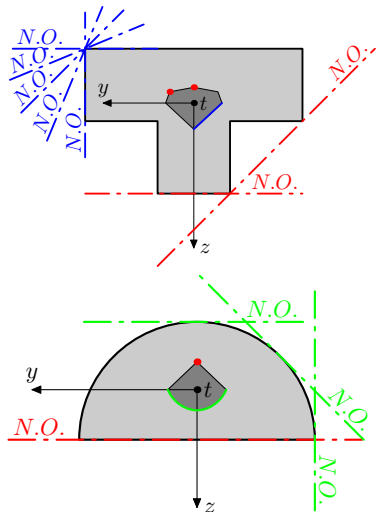
Jádro průřezu

Excentrický tlak a vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Jádro průřezu

Určení jádra průřezu - obecný průřez



Jádro průřezu ohraničuje jádrová čára.

Jádrová čára je množina působišť sil odpovídající množině N.O., které tvoří tečny k obvodu průřezu.

Přímé straně obvodu průřezu odpovídá v jádrové čáře vrchol. Vrcholu na obvodu průřezu odpovídá v jádrové čáře přímá strana.

Křivce v obvodu průřezu odpovídá v jádrové čáře křivka.

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

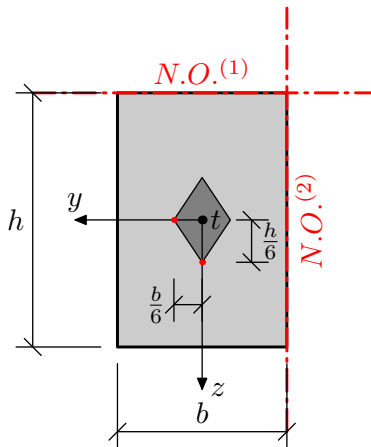
Excentrický tlak za

vyloženého tahu

Kontrolní otázky

Jádro průřezu

Určení jádra průřezu - obdélníkový průřez



1. Výpočet pro $N.O.(1)$

$$I_y = \frac{1}{12}bh^3$$

$$A = bh$$

$$j_z = \frac{I_y}{A \frac{h}{2}} = \frac{1}{6}h$$

2. Výpočet pro $N.O.(2)$

$$I_z = \frac{1}{12}hb^3$$

$$A = bh$$

$$j_y = \frac{I_z}{A \frac{b}{2}} = \frac{1}{6}b$$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

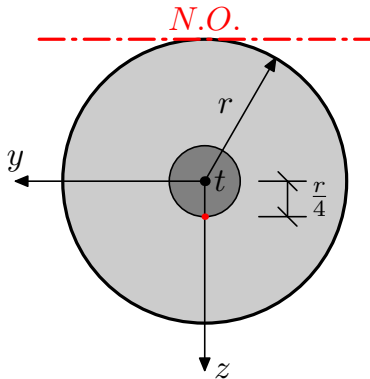
Excentrický tlak za

vyloženého tahu

Kontrolní otázky

Jádro průřezu

Určení jádra průřezu - kruhový průřez



$$I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$$

$$A = \pi r^2$$

$$j_z = \frac{I_y}{Ar} = \frac{1}{4} r$$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za

vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Excentrický tlak za vyloučeného tahu

Kdy je nutné uvažovat vyloučený tah?

U materiálů, kde nemůžeme předpokládat, že dochází k přenášení tahového napětí:

- ▶ Zdivo
- ▶ Základová spára u plošných základů
- ▶ Prostý beton

Průběh normálového napětí závisí na excentricitě tlakové síly:

1. **Tlaková síla působí v jádře průřezu** – celý průřez je tlačěn, je možné využít lineární pružnost.
2. **Tlaková síla působí mimo jádro průřezu** – je třeba najít polohu N.O. z podmínek ekvivalence pro N , M_y a M_z .
V obecných případech vede k iteračnímu výpočtu.

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

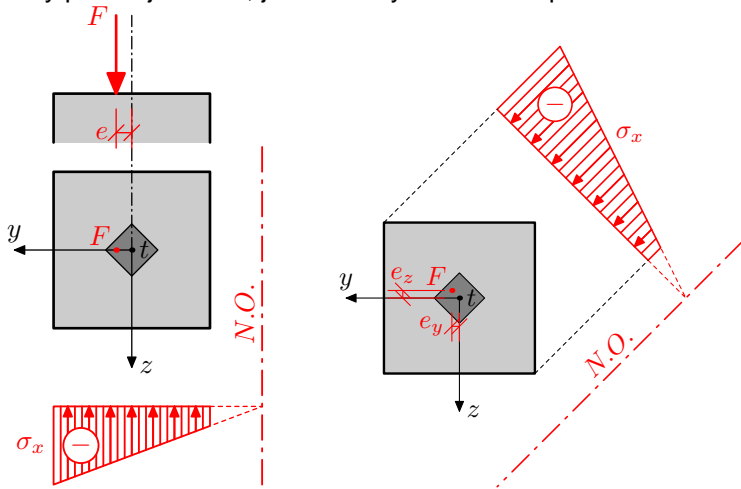
Excentrický tlak za
vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Excentrický tlak za vyloučeného tahu

Tlaková síla působí v jádru průřezu

Celý průřez je tlačěn, je možné využít lineární pružnost.



Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

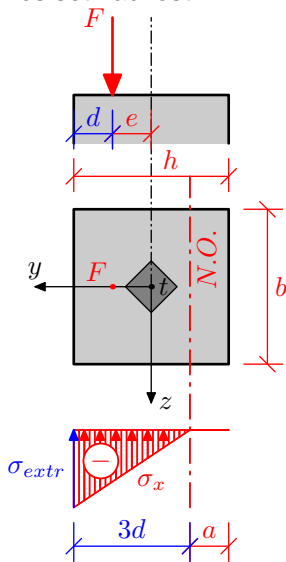
Excentrický tlak za vyloučeného tahu

Kontrolní otázka

Excentrický tlak za vyloučeného tahu

Tlaková síla působí mimo jádro průřezu

Obdélníkový průřez a excentricita ve směru jedné z hlavních os setrvačnosti.



Z podmínek ekvivalence plyne:

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

$$-F = \frac{1}{2} \sigma_{extr} (h - a) b$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA$$

$$F e = - \frac{1}{2} \sigma_{extr} (h - a) b \left[\frac{h}{2} - \frac{1}{3} (h - a) \right]$$

Lze odvodit:

Jestliže označíme $d = \frac{h}{2} - e$, potom $h - a = 3d$ a extrémní napětí

$$\sigma_{extr} = \frac{2N}{3db}$$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

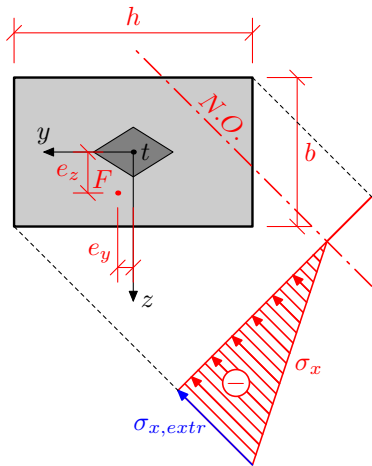
Excentrický tlak za vyloučeného tahu

Kontrolní otázka

Excentrický tlak za vyloučeného tahu

Tlaková síla působí mimo jádro průřezu

Obdélníkový průřez a obecný směr excentricity.



Je-li excentricita ve směru obou os y a z , je třeba najít $N.O.$ a $\sigma_{x,extr}$ iteračními metodami z podmínek ekvivalence:

$$N = \int_A \sigma_x dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA$$

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA$$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

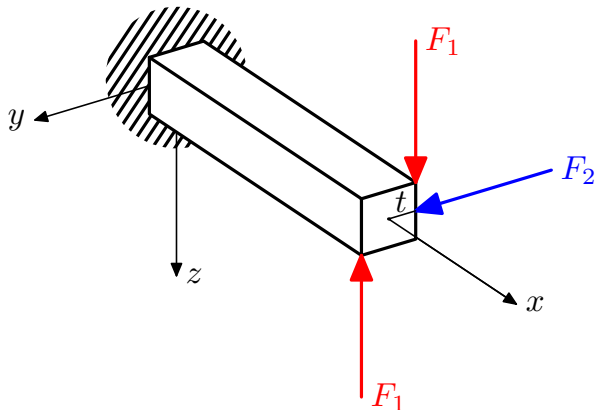
Jádro průřezu

Excentrický tlak za vyloučeného tahu

Kontrolní otázka

Kontrolní otázka

Určete, které z vnitřní sily jsou ve vetknutí nulové a které nenulové. Doplňte symbol „= 0“ nebo „ $\neq 0$ “.

 N M_y M_z V_y V_z M_x

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

 $M_y + N$

Kombinace namáhání

 $M_z + N$

Kombinace namáhání

 $M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

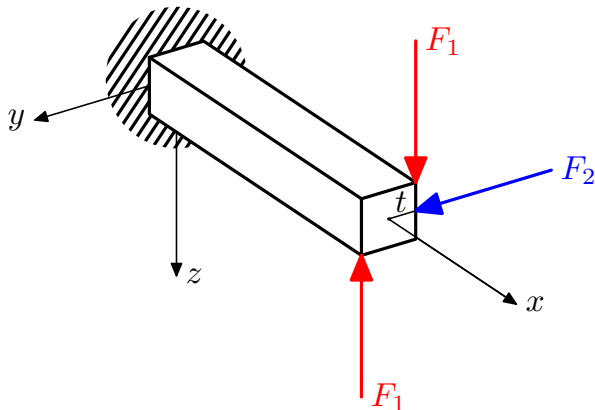
Excentrický tlak za

vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Kontrolní otázka

Určete, které z vnitřní síly jsou ve vetknutí nulové a které nenulové. Doplňte symbol „= 0“ nebo „ $\neq 0$ “.



$$N = 0 \quad M_y = 0 \quad M_z \neq 0 \quad V_y \neq 0 \quad V_z = 0 \quad M_x \neq 0$$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

 $M_y + N$

Kombinace namáhání

 $M_z + N$

Kombinace namáhání

 $M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

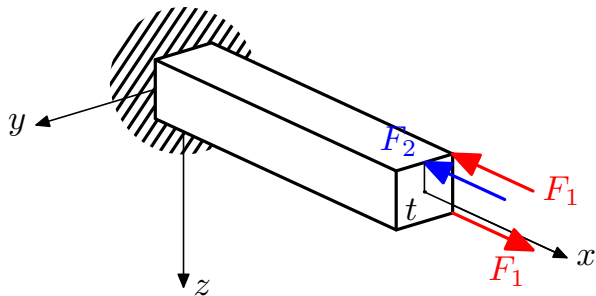
Excentrický tlak za

vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Kontrolní otázka

Určete, které z vnitřní sily jsou ve vetknutí nulové a které nenulové. Doplňte symbol „= 0“ nebo „ $\neq 0$ “.

 N M_y M_z V_y V_z M_x

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

 $M_y + N$

Kombinace namáhání

 $M_z + N$

Kombinace namáhání

 $M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

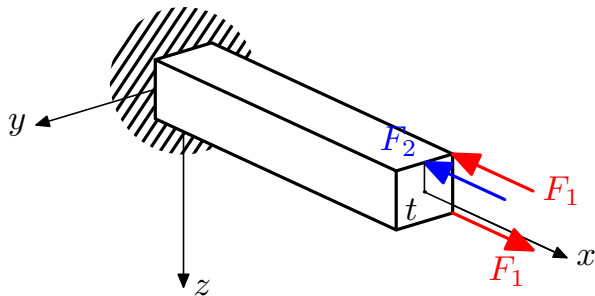
Excentrický tlak za

vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Kontrolní otázka

Určete, které z vnitřní sily jsou ve vetknutí nulové a které nenulové. Doplňte symbol „= 0“ nebo „ $\neq 0$ “.



$N \neq 0$ $M_y \neq 0$ $M_z = 0$ $V_y = 0$ $V_z = 0$ $M_x = 0$

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

 $M_y + N$

Kombinace namáhání

 $M_z + N$

Kombinace namáhání

 $M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za

vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

 $M_y + N$

Kombinace namáhání

 $M_z + N$

Kombinace namáhání

 $M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za
vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Jádro průřezu je oblast průřezu v okolí těžiště průřezu, pro kterou platí:

- TLaková síla v jádru průřezu vyvolá v průřezu jen tahové normálové napětí.
- TLaková síla v jádru průřezu vyvolá v průřezu jen tlakové normálové napětí.
- TLaková síla v jádru průřezu vyvolá v průřezu tahové i tlakové normálové napětí.

Kombinace namáhání

Šikmý ohyb

Kombinace namáhání

$M_y + N$

Kombinace namáhání

$M_z + N$

Kombinace namáhání

$M_y + M_z + N$

Jádro průřezu

Excentrický tlak za
vyloučeného tahu

Kontrolní otázky

Děkuji za pozornost.

Vysázeno systémem \LaTeX .

Obrázky vytvořeny v systému METAPOST.