

Statika 2

3. přednáška

Průhybová čára Vetknuté nosníky

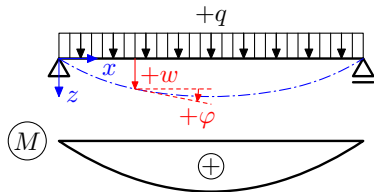
Miroslav Vokáč
miroslav.vokac@klok.cvut.cz

ČVUT v Praze, Fakulta architektury

2. listopadu 2016

Průhybová čára ohýbaného nosníku

Znaménková konvence veličin



q ... spojité zatížení je kladné
ve směru osy z

M ... kladný ohybový moment
táhne dolní vlákna

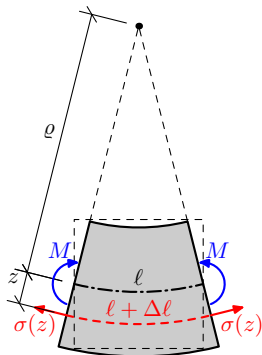
w ... průhyb je kladný ve směru
osy z

φ ... natočení průřezu je kladné
po směru hodinových ručiček

Protože natočení průřezu φ je velmi malé, můžeme předpokládat $\varphi(x) \doteq \tan(\varphi(x)) = w'(x)$.

Budeme předpokládat ohýbané nosníky s konstantním průřezem po celé délce, tj. s konstantní ohybovou tuhostí průřezu EI .

Odvození vztahu pro křivost



Předpokládejme prut ohýbaný konstantním ohybovým momentem M .

Pro $\varepsilon(z)$ lze odvodit:

$$\frac{\ell}{\ell + \Delta\ell} = \frac{1}{1 + \varepsilon(z)} = \frac{\rho}{\rho + z} \Rightarrow \varepsilon(z) = \frac{z}{\rho}$$

Dosazením do Hookeova zákona získáme: $\sigma(z) = E\varepsilon(z) = E\frac{z}{\rho}$

Dosazením do podmínky ekvivalence:

$$M = \int_A \sigma(z) z \, dA = \frac{E}{\rho} \int_A z^2 \, dA$$

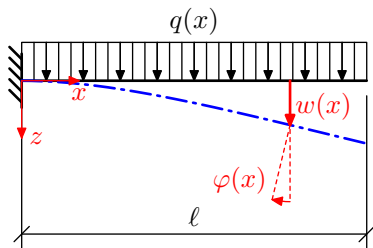
Proto můžeme vyjádřit:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$\frac{1}{\rho}$... je křivost

EI ... je ohybová tuhost průřezu

Odvození diferenciální rovnice průhybové čáry



Křivost funkce $w(x)$ je matematicky definována:

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{w''(x)}{\{1+w'^2(x)\}^{3/2}} \right|$$

Protože $w(x) \ll l$ pro $x \in \langle 0, l \rangle$, předpokládáme $\frac{1}{\rho} \doteq |w''(x)|$, a proto platí:

$$-w''(x) = \frac{M(x)}{EI}$$

Dále musí platit Schwedlerovy věty:

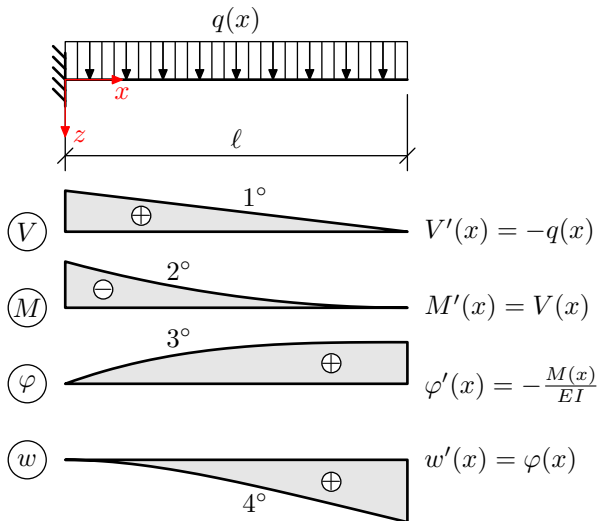
$$M'(x) = V(x)$$

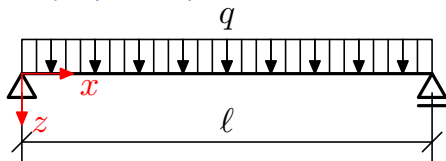
$$V'(x) = -q(x)$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry:

$$EI w^{IV}(x) = q(x)$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry a průběhy funkcí $V(x)$, $M(x)$, $\varphi(x)$ a $w(x)$





$$EI w^{IV}(x) = q(x) = q$$

$$EI w'''(x) = -V(x) = qx + C_1$$

$$EI w''(x) = -M(x) = q\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2$$

$$EI w'(x) = EI \varphi(x) = q\frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$$

$$EI w(x) = q\frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_3x + C_4$$

Integrační konstanty se určí z okrajových podmínek:

- Pro $M(x)$ platí: $M(0) = 0$ $M(l) = 0$
- Pro $w(x)$ platí: $w(0) = 0$ $w(l) = 0$

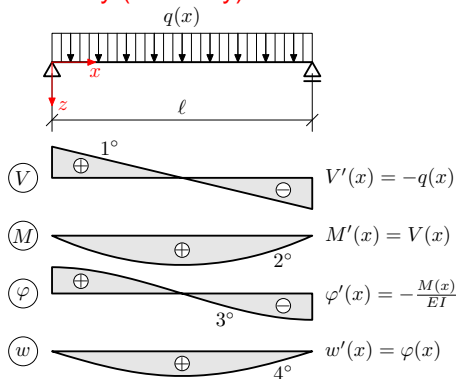
Průhyb uprostřed rozpětí:

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$$

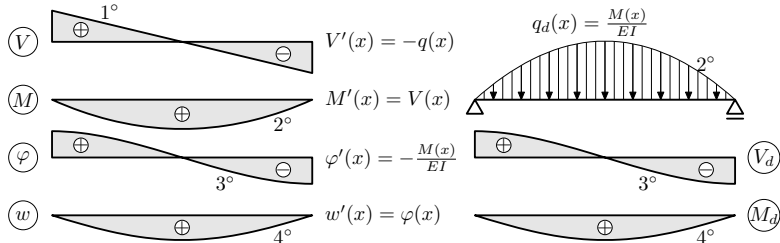
Mohrova analogie

(Mohrovy věty)

Reálný (skutečný) nosník



Duální (fiktivní) nosník



Mohrova analogie

(Mohrovy věty)

1. Natočení průřezu $\varphi(x)$ na reálném nosníku odpovídá posouvající síle na duálním nosníku $V_d(x)$.
2. Průhyb $w(x)$ na reálném nosníku odpovídá ohybovému momentu na duálním nosníku $M_d(x)$.
3. Zatížení duálního nosníku odpovídá obrazci ohybového momentu na reálném nosníku redukovaném ohybovou tuhostí průřezu, tj. $q_d(x) = \frac{M(x)}{EI}$.
4. Duální nosník musí splňovat okrajové podmínky pro průhybovou čáru dle následující tabulky. . .

Mohrova analogie

Okrajové podmínky pro sestavení duálního nosníku

Reálný (skutečný) nosník

Duální (fiktivní) nosník



$$w = 0$$

$$\varphi \neq 0$$

$$M_d = 0$$

$$T_d \neq 0$$



$$w = 0$$

$$\varphi = 0$$

$$M_d = 0$$

$$T_d = 0$$



$$w \neq 0$$

$$\varphi \neq 0$$

$$M_d \neq 0$$

$$T_d \neq 0$$



$$w = 0$$

$$\varphi_L = \varphi_P$$

$$M_d = 0$$

$$T_{dL} = T_{dP}$$



$$w \neq 0$$

$$\varphi_L \neq \varphi_P$$

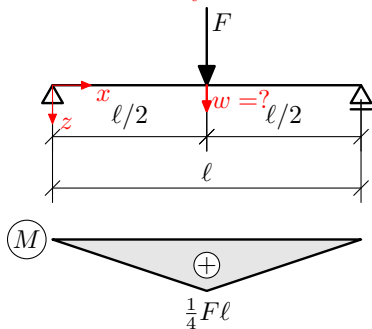
$$M_d \neq 0$$

$$T_{dL} \neq T_{dP}$$



Průhyb prostého nosníku Mohrovou analogií

Reálný nosník



Zatížení na duálním nosníku:

$$q_d = \frac{F l}{4 E I}$$

Výslednice trojúhelníkového zatížení:

$$Q_d = \frac{1}{2} \frac{l}{2} q_d = \frac{1}{16} \frac{F l^2}{E I}$$

Reakce na duálním nosníku:

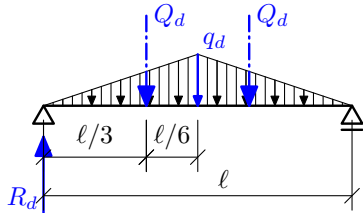
$$R_d = Q_d = \frac{1}{16} \frac{F l^2}{E I}$$

Průhyb uprostřed rozpětí:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = M_d\left(\frac{l}{2}\right) = R_d \frac{l}{2} - Q_d \frac{l}{6}$$

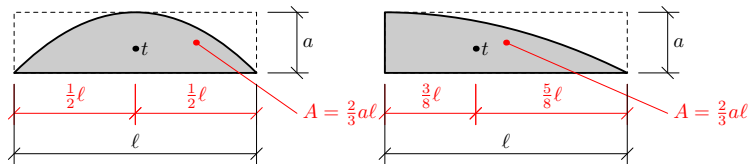
$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{48} \frac{F l^3}{E I}$$

Duální nosník

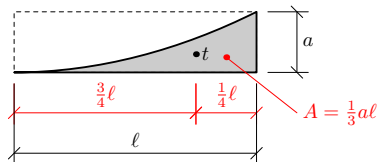


Plochy a těžiště některých parabolických obrazců

Parabolická úseč



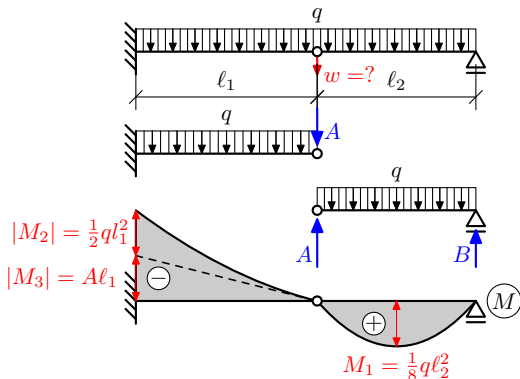
Parabolický trojúhelník



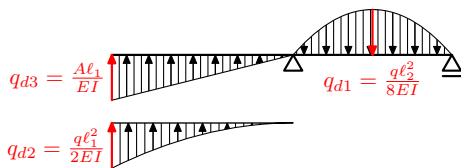
Příklad dělení parabolických ploch $M(x)$

pro Mohrovu analogii

Reálný nosník



Duální nosník



Diferenciální rovnice
průhybové čáry

Mohrova analogie

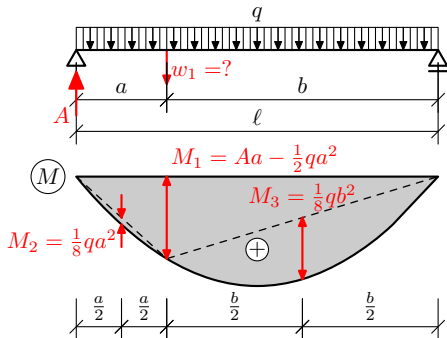
Vetknuté nosníky

Kontrolní otázky

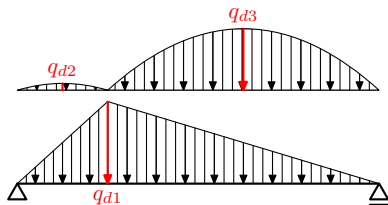
Příklad dělení parabolických ploch $M(x)$

pro Mohrovu analogii

Reálný nosník



Duální nosník



Diferenciální rovnice
průhybové čáry

Mohrova analogie

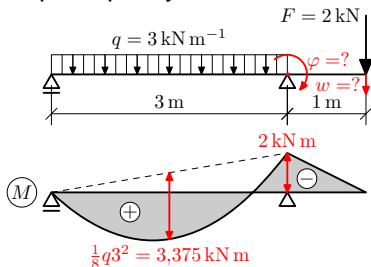
Vetknuté nosníky

Kontrolní otázky

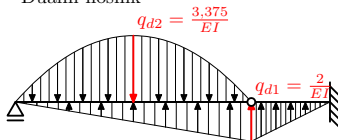
Mohrova analogie

Příklad

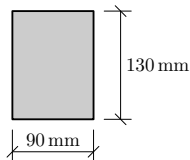
Určete průhyb a natočení průřezu pro daný dřevěný trám v předepsaných bodech.



Duální nosník



Modul pružnosti uvažujte
 $E = 10 \text{ GPa}$.



Moment setrvačnosti průřezu:

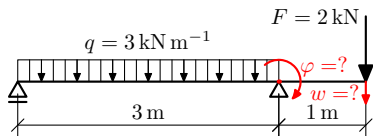
$$I_y = \frac{1}{12}bh^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} \cdot 90 \cdot 130^3$$

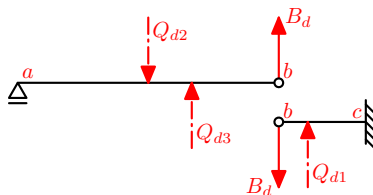
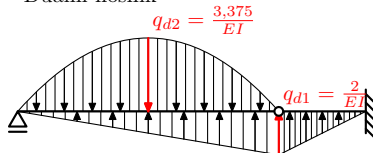
$$I_y = 16,478 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Mohrova analogie

Příklad



Duální nosník



Výslednice zatížení:

$$Q_{d1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{EI} = \frac{1}{EI}$$

$$Q_{d2} = \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \frac{3,375}{EI} = \frac{6,75}{EI}$$

$$Q_{d3} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{2}{EI} = \frac{3}{EI}$$

Reakce na duálním nosníku:

\vec{a} :

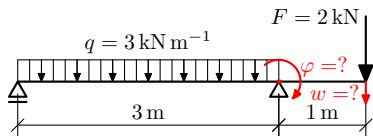
$$Q_{d2} \cdot 1,5 - Q_{d3} \cdot 2 - B_d \cdot 3 = 0$$

$$\frac{6,75}{EI} \cdot 1,5 - \frac{3}{EI} \cdot 2 - B_d \cdot 3 = 0$$

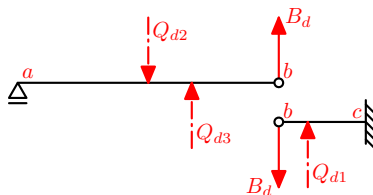
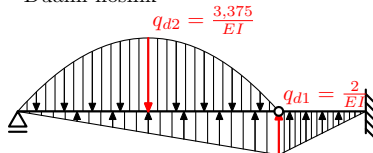
$$B_d = \frac{1,375}{EI}$$

Mohrova analogie

Příklad



Duální nosník



Průhyb w :

$$w = -B_d \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot Q_{d1}$$

$$w = -\frac{1,375}{EI} \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{EI}$$

$$w = -\frac{0,708}{EI}$$

$$w = -\frac{0,708}{10 \cdot 10^6 \cdot 16,478 \cdot 10^{-6}}$$

$$w = -4,30 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Natočení φ :

$$\varphi = -B_d = -\frac{1,375}{EI}$$

$$\varphi = -\frac{1,375}{10 \cdot 10^6 \cdot 16,478 \cdot 10^{-6}}$$

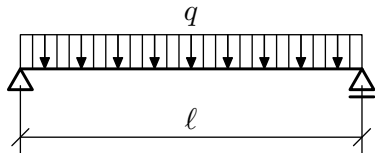
$$\varphi = -8,34 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = -0,478^\circ$$

Průhyby prostého nosníku

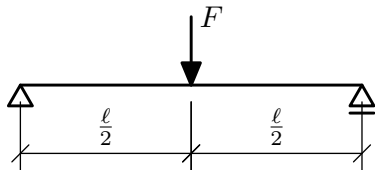
Vzorce pro stanovení průhybů bývají pro různá zatížení tabelovány ve **Statických tabulkách**.

Hořejší, J.; Šafka, J. a kol. *Statické tabulky*. Technický průvodce, svazek 51. Praha : SNTL, 1987.

Vybrané nejdůležitější případy



$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{5}{384} \frac{q\ell^4}{EI}$$

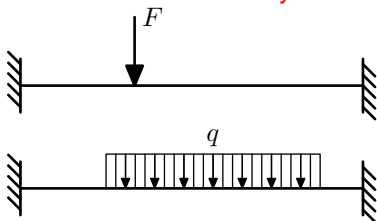


$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{1}{48} \frac{F\ell^3}{EI}$$

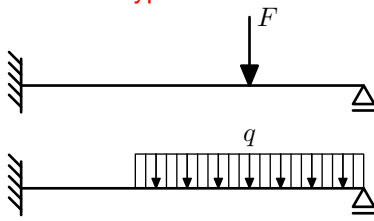
Doporučené maximální hodnoty průhybu nosníku

- ▶ Průhyb ohýbaného nosníku nemůže být natolik velký, aby omezoval použitelnost konstrukce (např. znemožnění otevírání oken naměrným průhybem překladu).
- ▶ Proto jsou v normě doporučené omezení.
- ▶ Maximální hodnota je závislá na typu konstrukce (trám, průvlak, konzola, strop (omítnutý/neomítnutý), střecha, překlad, mostní objekt).
- ▶ Různá omezení jsou dána také pro zatížení dlouhodobá a krátkodobá.
- ▶ Maximální hodnota průhybu je závislá i na materiálu (konstrukce dřevěné, ocelové, železobetonové a z předpjatého betonu, hliníkové. . .)
- ▶ U konstrukcí pozemních staveb se doporučuje maximální hodnota průhybu od $\frac{\ell}{200}$ do $\frac{\ell}{400}$ (podle typu konstrukce).

Vetknuté nosníky

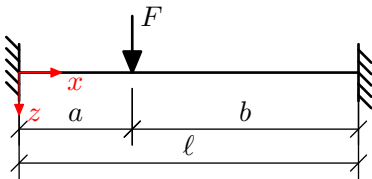


Nosník typu vetknutí-klob



- ▶ Vetknuté nosníky i pruty typu vetknutí-klob lze řešit přímou integrací z diferenciální rovnice průhybové čáry.
- ▶ Výsledkem jsou funkce $V(x)$, $M(x)$, $\varphi(x)$ i $w(x)$.
- ▶ Působí-li na nosník složka zatížení ve směru osy x , lze řešit staticky neurčitý tah a tlak z Hookeova zákona.
- ▶ Reakce v podporách se určí až z průběhů vnitřních sil $V(x)$, $M(x)$ a $N(x)$.

Příklad vetknutého nosníku



Nosník rozdělíme na 2 části:

$$w''^V(x) = \begin{cases} w_1''^V(x) = 0 & \text{pro } x \in \langle 0, a \rangle \\ w_2''^V(x) = 0 & \text{pro } x \in \langle a, \ell \rangle \end{cases}$$

Integrujeme oba intervaly zvlášť:

$$EI w_1''^V(x) = 0 \Rightarrow EI w_1(x) = C_{11} \frac{x^3}{6} + C_{12} \frac{x^2}{2} + C_{13}x + C_{14}$$

$$EI w_2''^V(x) = 0 \Rightarrow EI w_2(x) = C_{21} \frac{x^3}{6} + C_{22} \frac{x^2}{2} + C_{23}x + C_{24}$$

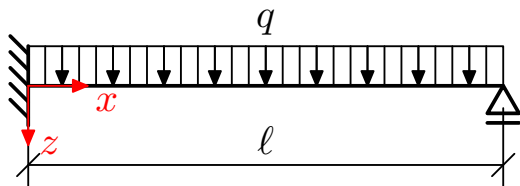
Integrační konstanty se určí z okrajových podmínek
a podmínek spojitosti:

1. Okrajové podmínky:

$$w_1(0) = 0 \quad w_2(\ell) = 0 \quad w_1'(0) = 0 \quad w_2'(\ell) = 0$$

2. Podmínky spojitosti:

$$w_1(a) = w_2(a) \quad w_1'(a) = w_2'(a) \quad w_1''(a) = w_2''(a) \\ -EI w_1'''(a) - F = -EI w_2'''(a)$$



Integrací diferenciální rovnice průhybové čáry získáme:

$$EI w''''(x) = q \Rightarrow EI w(x) = q \frac{x^4}{24} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Integrační konstanty se určí z okrajových podmínek:

1. Okrajové podmínky pro průhyb: $w(0) = 0$ $w(l) = 0$
2. Okrajové podmínky pro natočení průřezu: $w'(0) = 0$
3. Okrajové podmínky pro ohybový moment: $w''(l) = 0$

Vetknuté nosníky a pruty typu vetknutí-kloub

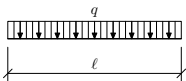
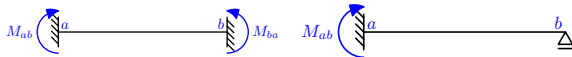
Moment ve vetknutí pro vybrané typy zatížení

Ohybové momenty ve vetknutí bývají pro různá zatížení tabelovány ve Statických tabulkách.

Hořejší, J.; Šafka, J. a kol. *Statické tabulky*. Technický průvodce, svazek 51. Praha : SNTL, 1987.

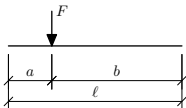
Vybrané nejdůležitější případy

Zatížení
prutu



$$M_{ab} = M_{ba} = -\frac{1}{12}q\ell^2$$

$$M_{ab} = -\frac{1}{8}q\ell^2$$



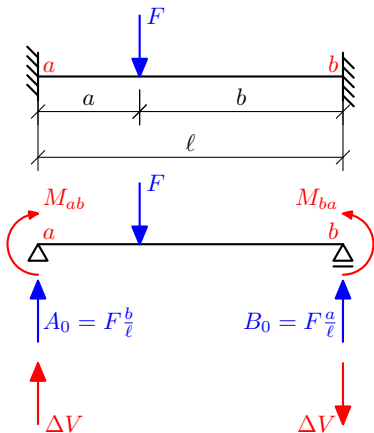
$$M_{ab} = -\frac{Fab^2}{\ell^2}$$

$$M_{ba} = -\frac{Fba^2}{\ell^2}$$

$$M_{ab} = -F\frac{ab(\ell+b)}{2\ell^2}$$

Vetknuté nosníky a pruty typu vetknutí-kloub

Doplňěk posouvající síly



Posouvající síla $V(x)$ se určí jako posouvající síla na prostém nosníku $V_0(x)$ zvětšená o doplněk posouvajících sil ΔV :

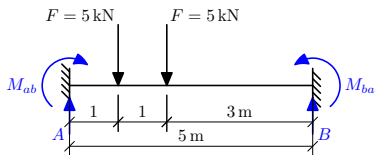
$$V(x) = V_0(x) + \frac{M_{ba} - M_{ab}}{l}$$

Doplňěk ΔV je na celém prutu konstantní.

Po určení ohybových momentů ve vetknutí, reakcí $A = A_0 + \Delta V$ a $B = B_0 - \Delta V$ jsou známy všechny síly pro výpočet průběhů $V(x)$ a $M(x)$.

Vetknuté nosníky a pruty typu vetknutí-klobouk

Příklad stanovení průběhu vnitřních sil



$$M_{ab} = -\frac{5 \cdot 1 \cdot 4^2}{5^2} - \frac{5 \cdot 2 \cdot 3^2}{5^2}$$

$$M_{ab} = -6,8 \text{ kN m}$$

$$M_{ba} = -\frac{5 \cdot 4 \cdot 1^2}{5^2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 2^2}{5^2}$$

$$M_{ba} = -3,2 \text{ kN m}$$

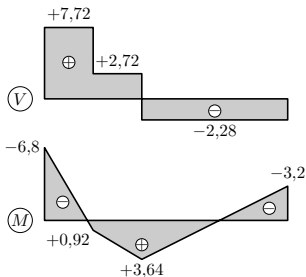
$$\Delta V = \frac{-3,2 - (-6,8)}{5} = +0,72 \text{ kN}$$

$$A = 5 \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot \frac{3}{5} + 0,72$$

$$A = +7,72 \text{ kN}$$

$$B = 5 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5} - 0,72$$

$$B = +2,28 \text{ kN}$$



Předpoklad, že průřez oýbaného nosníku zůstává po deformaci rovinný a kolmý na průhybovou čáru, nazýváme:

- a) Schwedlerova věta
- b) Steinerova věta
- c) Bernoulli-Navierova hypotéza

Průhyb středu rozpětí prostého nosníku rozpětí L zatíženého spojitým zatížením q po celé jeho délce se vypočte:

$$a) w = \frac{5}{384} \frac{qL^2}{EI}$$

$$b) w = \frac{5}{384} \frac{qL^3}{EI}$$

$$c) w = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$

Diferenciální rovnice průhybové čáry $w(x)$ má tvar:

a) $EI w''(x) = q(x)$

b) $EI w'''(x) = q(x)$

c) $EI w''''(x) = q(x)$

Podle Mohrovy analogie odpovídá funkci průhybu na reálném nosníku:

- a) Funkce spojitého zatížení na duálním nosníku.
- b) Funkce posouvající síly na duálním nosníku.
- c) Funkce ohybového momentu na duálním nosníku.

Děkuji za pozornost.

Vysázeno systémem \LaTeX .

Obrázky vytvořeny v systému METAPOST.