Statika 2

4. přednáška
Stabilita tlačených prutů
Smyk za ohybu

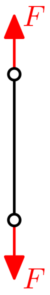
Miroslav Vokáč
miroslav.vokac@klok.cvut.cz

ČVUT v Praze, Fakulta architektury

18. listopadu 2015

Stabilita tlačených prutů

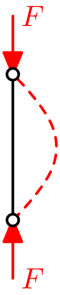
TAH



$$F_{max} = A\sigma_{dov}$$

- U tlačených prutů dochází před dosažením pevnosti materiálu ke ztrátě stability, k vybočení prutu a jeho porušení!
- Předpokládejme materiál s lineárním materiálovým modelem (Hookeův zákon). Únosnost prutu v tlaku je menší než únosnost v prostém tahu!

TLAK



$$F_{max} < A\sigma_{dov}$$

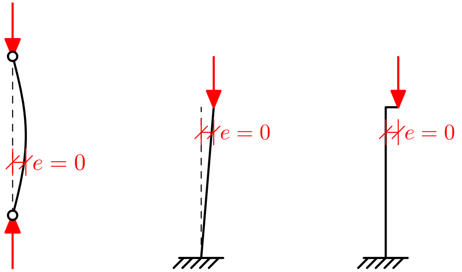
Eulerovo kritické břemeno

Ideální (perfektní) prut

Eulerovo kritické břemeno je tlaková centrická síla, při které dojde ke ztrátě stability ideálního (perfektního) prutu.

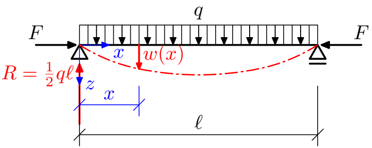
Perfektní prut je:

- dokonale přímý,
- síly na obou koncích prutu jsou vneseny dokonale souose,
- osová síla působí dokonale centricky.



Eulerovo kritické břemeno

Teorie I. řádu - vnitřní síly stanovujeme k nedeformovanému tvaru konstrukce.
Teorie II. řádu - vnitřní síly stanovujeme k deformované střednici prutu.



Podle teorie II. řádu se určí ohybový moment:
$M(x) = R\,x - \frac{1}{2}qx^2 + F\,w(x)$

Z diferenciální rovnice průhybové čáry:
$M(x) = -EI\,w''(x)$

Z rovnosti těchto výrazů lze získat diferenciální rovnici:
$w''(x) + \frac{F}{EI}\,w(x) = \frac{q}{2EI}(x^2 - \ell x)$

Euler řešil vlastní problém této diferenciální rovnice, kdy se předpokládá, že pravá strana rovnice je nulová, tj. $q = 0$, a hledá se netriviální řešení $w(x) \neq 0$.

Odtud Euler (1707-1783) odvodil vzorec pro kritickou sílu F_{cr}.

Eulerovo kritické břemeno

Řešení vlastního problému – prut typu kloub-kloub

$$w''(x) + \frac{F_{cr}}{EI} w(x) = 0$$

Lze ukázat, že vlastní funkce (tvary vybočení) splňující okrajové podmínky $w(0) = w(\ell) = M(0) = M(\ell) = 0$ mají v tomto případě tvar:

$$w(x) = \sin \frac{n\pi x}{\ell} \text{ , kde } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Derivováním vlastní funkce získáme:

$$w'(x) = \frac{n\pi}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

$$w''(x) = -\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

Dosazením do diferenciální rovnice:

$$-\frac{n^2\pi^2}{\ell^2} \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{F_{cr}}{EI} \sin \frac{n\pi x}{\ell} = 0$$

Odtud plyne hodnota Eulerovy kritické síly F_{cr}:

$$F_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EI}{\ell^2}, \text{ kde } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Rozhoduje nejmenší hodnota, tj. F_{cr} pro $n = 1$.

Eulerovo kritické břemeno

Lze odvodit a pro různá uložení prutu zobecnit vzorec pro Eulerovo kritické břemeno:

$$F_{cr} = EI_{min}\frac{\pi^2}{L_{cr}^2}$$

$E\ldots$modul pružnosti

$I_{min}\ldots$menší z hlavních centrálních momentů setrvačnosti průřezu *(za předpokladu stejného uložení prutu v rovině xy a xz)*

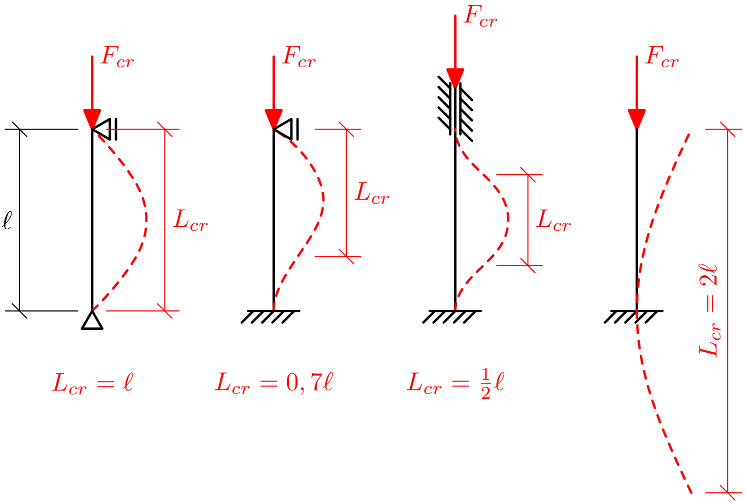
$L_{cr}\ldots$vzpěrná délka, závisí na způsobu uložení prutu

Eulerovo kritické břemeno

Vzpěrná délka

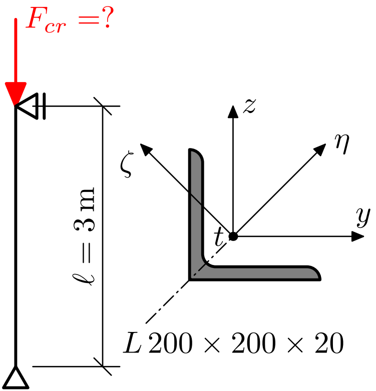
Vzpěrná délka je vzdálenost inflexních bodů tvaru vybočení prutu.

Tvar vybočení odpovídá vlastní funkci a je to sinusovka.



Eulerovo kritické břemeno

Příklad



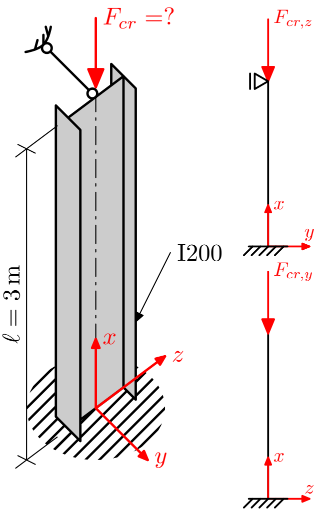
$$I_y = I_z = 28{,}5.10^6\,\mathrm{mm}^4$$
$$I_\eta = 45{,}3.10^6\,\mathrm{mm}^4$$
$$I_\zeta = 11\,800.10^3\,\mathrm{mm}^4$$

$$I_{min} = 11{,}8.10^6\,\mathrm{mm}^4$$
$$L_{cr} = \ell = 3\,\mathrm{m}$$
$$E = 210\,\mathrm{GPa}$$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_{cr}^2} = \frac{\pi^2\, 210.10^6 \,.\, 11{,}8.10^{-6}}{3^2} = 271{,}7\,\mathrm{kN}$$

Eulerovo kritické břemeno

Příklad



1. Vybočení v rovině *xy* (k nehmotné ose)

$$I_z = 1{,}16.10^6\,\mathrm{mm}^4$$
$$L_{cr,z} = 0{,}7\ell = 2{,}1\,\mathrm{m}$$
$$F_{cr,z} = \frac{\pi^2 210.10^6\ .\ 1{,}16.10^{-6}}{2{,}1^2}$$
$$F_{cr,z} = 545{,}2\,\mathrm{kN}$$

2. Vybočení v rovině *xz* (k hmotné ose)

$$I_y = 21{,}4.10^6\,\mathrm{mm}^4$$
$$L_{cr,y} = 2\ell = 6\,\mathrm{m}$$
$$F_{cr,y} = \frac{\pi^2 210.10^6\ .\ 21{,}4.10^{-6}}{6^2}$$
$$F_{cr,y} = 1\,232{,}1\,\mathrm{kN}$$

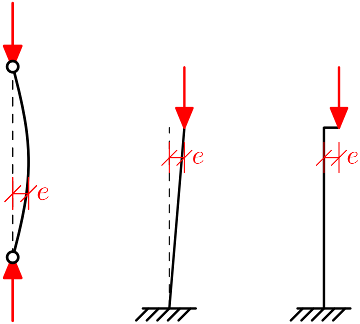
$$F_{cr} = \min(F_{cr,y},\ F_{cr,z}) = 545{,}2\,\mathrm{kN}$$

Vzpěrný tlak

Reálný (imperfektní) prut

Skutečné pruty nejsou ideální, ale mají určité imperfekce:

- tolerance prohnutí,
- tolerance ve svislosti,
- náhodná excentricita zatížení.



Proto navrhujeme reálné osamělé sloupy (ocelové, dřevěné) pomocí součinitelů vzpěru na vzpěrný tlak.

Vzpěrný tlak

Podmínka spolehlivosti

Podmínka spolehlivosti podle teorie dovolených namáhání:

$$|\sigma| = \frac{|N|}{A} \leq \varphi\, \sigma_{dov}$$

φ... je součinitel vzpěru (vzpěrnostní součinitel), $\varphi \leq 1$, v éře dovolených namáhání se používal součinitel $c \geq 1$, $c = \frac{1}{\varphi}$

$\varphi = \varphi(\lambda)$... vztah je dán složitějším výpočtem, který je často tabelován (viz příslušná norma)

λ... je štíhlost prutu

$\lambda = \frac{L_{cr}}{i}$

i... je poloměr setrvačnosti

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$

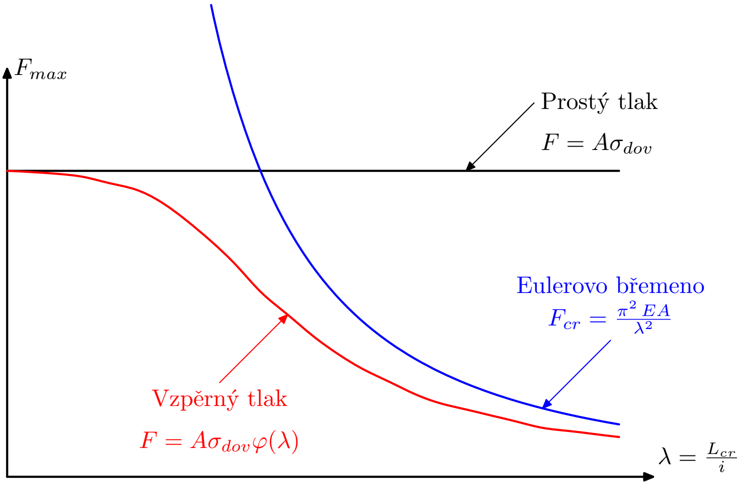
Vzpěrný tlak

Vývoj v našich normách pro navrhování

- V éře dovolených namáhání se označoval součinitel vzpěru $c \geq 1$.
- Po zavedení mezních stavů v systému norem ČSN se označoval součinitel vzpěru $\varphi \leq 1$.
- Po zavedení Eurokódu se označuje součinitel vzpěru $\chi \leq 1$.
- Eurokód zavádí několik druhů štíhlostí:
  - Základní štíhlost $\lambda_{y,z} = L_{cr}/i_{y,z}$, kde index y, z označuje, že se použije veličina vztažená k ose y nebo k ose z.
  - Srovnávací štíhlost, která je např. pro ocelové konstrukce rovna $\lambda_1 = 93{,}9\sqrt{235/f_y}$.
  - Poměrnou štíhlost $\lambda = \lambda_{y,z}/\lambda_1$.
- V Eurokódu je součinitel vzpěru vyjadřován jako funkce poměrné štíhlosti $\chi = \chi(\lambda)$.
- S různými metodami prokazování spolehlivosti stavebních konstrukcí se měnily i metodiky pro stanovení součinitelů vzpěru.

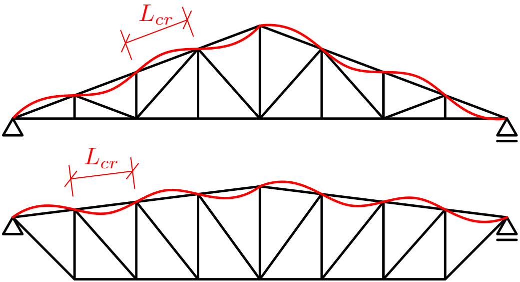
Vzpěrný tlak

Únosnost tlačeného prutu v závislosti na štíhlosti



Poznámky ke vzpěrným délkám

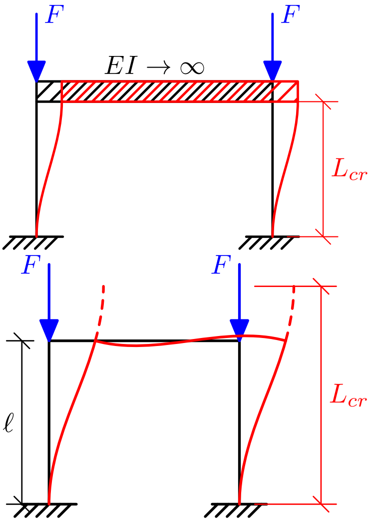
Vzpěrné délky u příhradových vazníků



- U příhradových vazníků je L_{cr} pro vybočení v rovině vazníku rovno délce prutu.
- Pro vybočení z roviny vazníku může být vzpěrná délka větší – v závislosti na konstrukčním uspořádání zavětrování, vaznic, světlíků…

Poznámky ke vzpěrným délkám

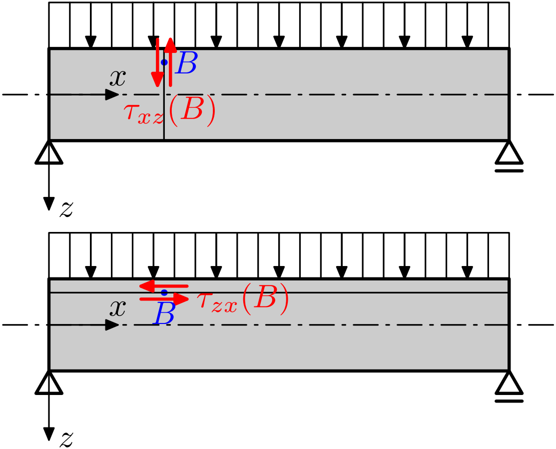
Vzpěrné délky u rámových konstrukcí



- Nejedná se o osamělé sloupy!
- Závisí na ohybových tuhostech průřezů *EI* a na délkách prutů ℓ!
- Vzpěrné délky se určují složitějším postupem nebo zjednodušeným postupem podle dané normy.

Smyk za ohybu

Věta o vzájemnosti tečných napětí

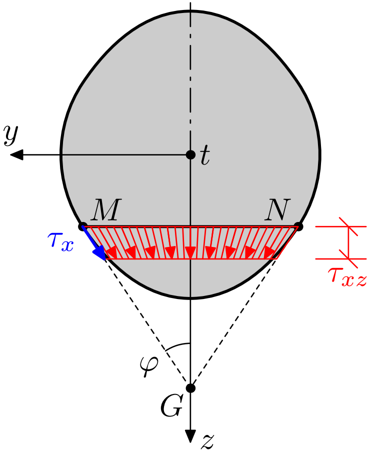


Věta o vzájemnosti tečných napětí:

$$\tau_{xz}(B) = \tau_{zx}(B)$$

Smyk za ohybu

Grashofova hypotéza



Grashofova hypotéza se týká rozdělení napětí τ_x podél úsečky *MN*:

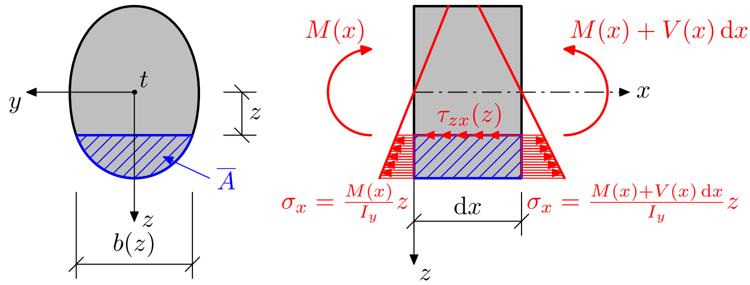
1. Složka napětí τ_{xz} je konstantní.
2. Vektory τ_x směřují do jediného bodu (Grashofův bod) a na obvodě průřezu mají směr tečny.

Z Grashofovy hypotézy plyne:
Maximální τ_x je na obvodě průřezu a má velikost

$$\tau_x = \frac{\tau_{xz}}{\cos\varphi}$$

Smyk za ohybu

Odvození vztahu pro τ_{xz}



$$\rightarrow: \; -\int_{\overline{A}} \frac{M(x)}{I_y} z \,\mathrm{d}A - \tau_{zx}(z)\, b(z)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{A}} \frac{M(x)+V(x)\,\mathrm{d}x}{I_y} z\,\mathrm{d}A = 0$$

$$-\tau_{zx}(z)\, b(z)\,\mathrm{d}x + \int_{\overline{A}} \frac{V(x)\,\mathrm{d}x}{I_y} z\,\mathrm{d}A = 0$$

$$\tau_{zx}(z) = \frac{V(x)}{I_y\, b(z)} \int_{\overline{A}} z\,\mathrm{d}A$$

$$\tau_{xz}(z) = \tau_{zx}(z) = \frac{V(x)\, S_y(\overline{A})}{I_y\, b(z)}$$

Smyk za ohybu

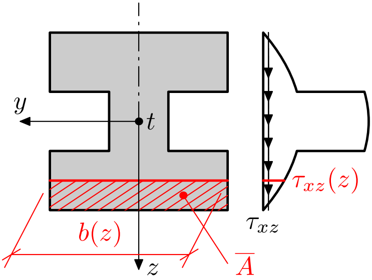
Pro smyk za ohybu musí platit:

Předpokládejme jen průřezy symetrické ke svislé ose z.

$$M_y \neq 0 \Rightarrow \sigma_x$$
$$V_z \neq 0 \Rightarrow \tau_x$$

Schwedlerova věta:

$$V_z(x) = M_y'(x)$$

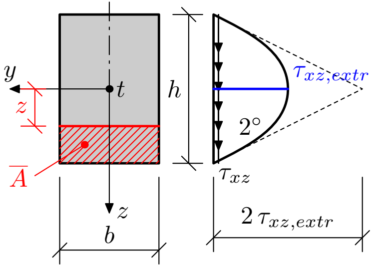


$$\tau_{xz}(z) = \frac{V_z\,\overline{S}_y(z)}{b(z)\,I_y}$$

V_z... posouvající síla
$b(z)$... šířka průřezu pro danou souřadnici z
I_y... moment setrvačnosti průřezu k ose y
$\overline{S}_y(z)$... statický moment dílčí části plochy průřezu $\overline{A}$ k ose y

Smyk za ohybu

Smyk za ohybu obdélníkového průřezu



Podle Grashofovy hypotézy:

$\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \tau_x = \tau_{xz}$

Napětí $\tau_{xz}(z)$:

$\overline{A}(z) = b(\frac{h}{2} - z)$

$\overline{S}_y(z) = \overline{A}(z + \frac{h}{4} - \frac{z}{2})$

$I_y = \frac{1}{12}bh^3$

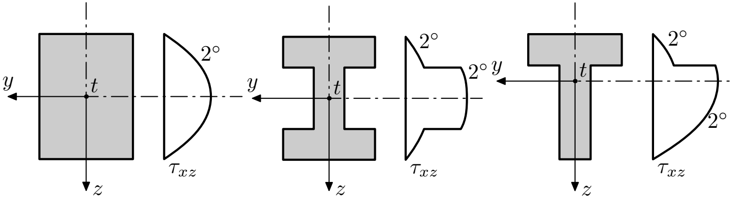
$b(z) = b$

$$\tau_{xz}(z) = \frac{V_z\,\overline{S}_y(z)}{I_y\,b(z)} = \frac{3\,V_z}{2\,bh^3}(h^2 - 4z^2)$$

$$\tau_{xz,extr} = \tau_{xz}(z = 0) = \frac{3\,V_z}{2\,bh}$$

Smyk za ohybu

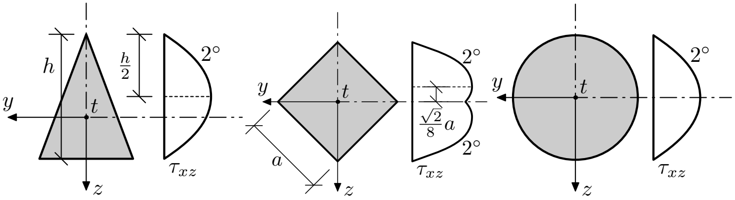
Průběhy τ_{xz} vybraných průřezů



U průřezů služených z obdélníků, kde $\varphi = 0$ a $\tau_{xz} = \tau_x$, je extrémní τ_x v těžišti průřezu.

Smyk za ohybu

Průběhy τ_{xz} vybraných průřezů

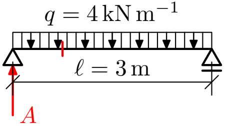


Pokud průřez není složen z obdélníků, $\varphi \neq 0$ a $\tau_{xz} \neq \tau_x$, je někdy nutné vyjádřit obecně funkci $\tau_{xz}(z)$ a hledat polohu extrému tečných napětí.

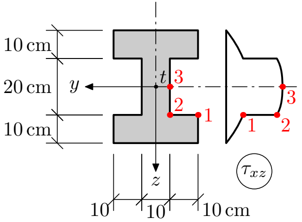
Smyk za ohybu

Příklad

Určete průběh tečných napětí v průřezu v 1/4 rozpětí nosníku.



$$A = \tfrac{1}{2} q \ell = 6\,\mathrm{kN}$$
$$V(\tfrac{\ell}{4}) = A - \tfrac{1}{4} q \ell = 3\,\mathrm{kN}$$



$$I_y = \tfrac{1}{12} \,.\, 30 \,.\, 40^3 - \tfrac{1}{12} \,.\, 20 \,.\, 20^3$$
$$I_y = 146\,666\,\mathrm{cm}^4$$

$$\tau_{xz} = \frac{V\,\overline{S_y}}{b\,I_y}$$

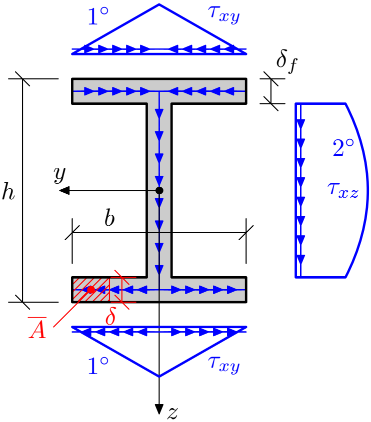
bod 1:
$$\overline{S_y} = 30 \,.\, 10 \,.\, 15 = 4\,500\,\mathrm{cm}^3$$
$$\tau_{xz,1} = \frac{3 \,.\, 4\,500.10^{-6}}{0{,}3 \,.\, 146\,666.10^{-8}} = 30{,}68\,\mathrm{kPa}$$

bod 2:
$$\tau_{xz,2} = \frac{3 \,.\, 4\,500.10^{-6}}{0{,}1 \,.\, 146\,666.10^{-8}} = 92{,}05\,\mathrm{kPa}$$

bod 3:
$$\overline{S_y} = 30 \,.\, 10 \,.\, 15 + 10 \,.\, 10 \,.\, 5 = 5\,000\,\mathrm{cm}^3$$
$$\tau_{xz,3} = \frac{3 \,.\, 5\,000.10^{-6}}{0{,}1 \,.\, 146\,666.10^{-8}} = 102{,}27\,\mathrm{kPa}$$

Smyk za ohybu

Specifika tenkostěnných průřezů



Neplatí Grashofova hypotéza. Smykový tok t sleduje tvar průřezu a má velikost

$$t = \frac{V_z\,\overline{S_y}}{I_y}$$

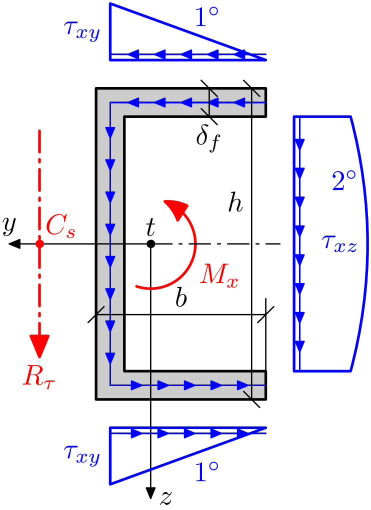
Tečné napětí je podél tloušťky δ rozděleno rovnoměrně

$$\tau_{xs} = \frac{t}{\delta} = \frac{V_z\,\overline{S_y}}{\delta\, I_y}$$

Pro tenkostěnný I průřez platí přibližný vztah $\delta_f < \frac{1}{10}\frac{b}{2}$.

Smyk za ohybu

Průřez bez svislé osy symetrie



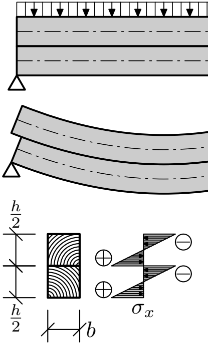
Pro tenkostěnný U průřez platí přibližný vztah $\delta_f < \frac{1}{10} b$.

U průřezů bez svislé osy symetrie výslednice τ_x neprochází těžištěm průřezu, ale středem smyku C_s.

Pokud zatížení neprochází středem smyku, dochází také ke kroucení průřezu!

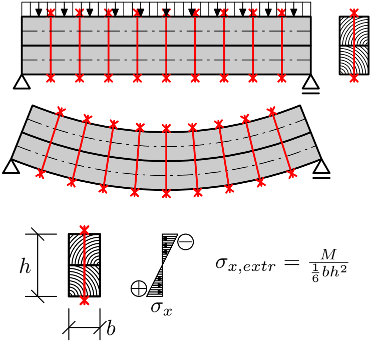
Složené nosníky

2 samostatné nosníky



$$\sigma_{x,extr} = \frac{\frac{1}{2}M}{\frac{1}{6}b(\frac{h}{2})^2}$$

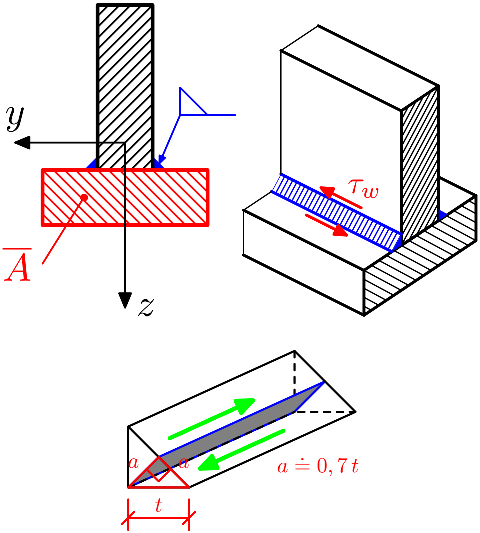
Složený průřez



$$\sigma_{x,extr} = \frac{M}{\frac{1}{6}bh^2}$$

U složených průřezů je třeba zajistit přenášení smykových napětí τ_{zx} vhodnými spojovacími prostředky dle daného materiálu (svorníky, hmoždíky, lepením, nýty, šrouby, svary, betonářskou výztuží, spřahovacími trny).

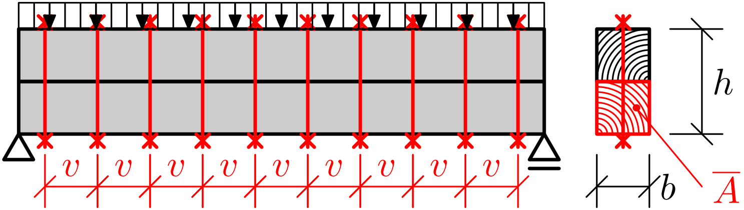
Koutový svar svařovaného ocelového nosníku



Tečné napětí ve svaru:

$$\tau_w = \frac{V_z\,\overline{S_y}}{2\,.\,0{,}7t\,I_y}$$

Síla na svorník nebo hmoždík u dřevěných trámových roštů

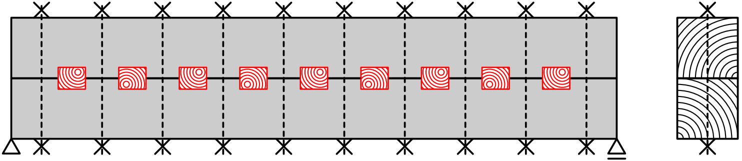


$$T = \tau_{zx}\, b\, v = \frac{V_z\, \overline{S_y}}{b\, I_y}\, v\, b = \frac{V_z\, \overline{S_y}}{I_y}\, v = \frac{V_z\, \frac{1}{8} bh^2}{\frac{1}{12} bh^3}\, v$$

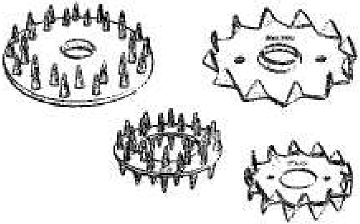
$$T = \frac{3\, V_z\, v}{2\, h}$$

Dřevěné trámové rošty

Dřevěné hmoždíky



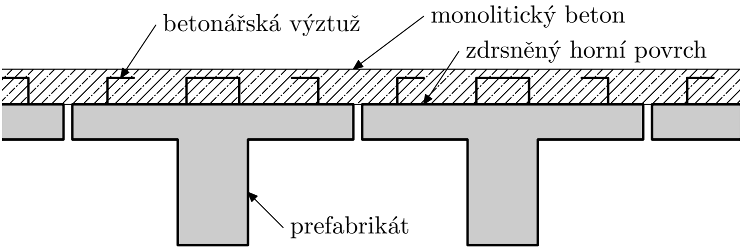
Ocelové hmoždíky „buldog“



Spolupůsobení mohou zajišťovat svorníky, hmoždíky, zazubení, tesařské skoby. . .

Spřažený průřez beton-betonu

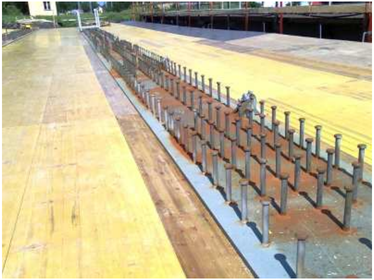
Mostní T-nosník z předpjatého betonu

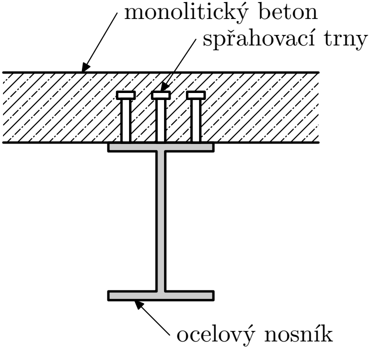


Spolupůsobení zajišťuje betonářská výztuž a zdrsněný horní povrch prefabrikátu.

Spřažený průřez ocel-beton

Ocelobetonový nosník





Spolupůsobení zajišťují navařené spřahovací trny.

Kontrolní otázka

Prut příhradové konstrukce namáhaný normálovou silou $N < 0$ budu posuzovat na:

a) Prostý tah
b) Prostý tlak
c) Vzpěrný tlak

Kontrolní otázka

Vzpěrná (kritická) délka u tlačených prutů je definována takto:

a) Vzpěrná délka je dvojnásobek délky prutu.
b) Vzpěrná délka je vzdálenost kloubových podpor.
c) Vzpěrná délka tlačeného prutu je zdálenost inflexních bodů tvaru vybočení.

Kontrolní otázka

Vzpěrná (kritická) délka tlačeného prutu, který má délku L a je typu vetknutí-vetknutí, se vypočte:

a) $L_{cr} = 0{,}5L$

b) $L_{cr} = 0{,}7L$

c) $L_{cr} = L$

Kontrolní otázka

Prostý smyk můžeme uvažovat:

a) Kdykoli je posouvající síla nenulová.
b) Jen u ohýbaných nosníků.
c) Jen u spojovacích prostředků jako jsou nýty, šrouby, svary, hřeby atd.

Kontrolní otázka

Tečné napětí v průřezu se v případě *prostého smyku* vypočte podle vztahu:

a) $\tau = \frac{V}{A}$

b) $\tau = \frac{V_z\, S_y(\overline{A})}{I_y\, b(z)}$

c) $\tau = \frac{N}{A}$

Kontrolní otázka

Tečné napětí v průřezu se při *smyku za ohybu* vypočte podle vztahu:

a) $\tau = \frac{V}{A}$

b) $\tau = \frac{V_z\, S_y(\overline{A})}{I_y\, b(z)}$

c) $\tau = \frac{N}{A}$

Kontrolní otázka

Extrémní hodnota tečného napětí v případě smyku za ohybu se u obdélníkového průřezu šířky b a výšky h vypočte:

a) $\tau = \frac{3V}{2bh^3}$

b) $\tau = \frac{3V}{2bh^2}$

c) $\tau = \frac{3V}{2bh}$

Konec přednášky

Děkuji za pozornost.

Vysázeno systémem LaTeX.
Obrázky vytvořeny v systému METAPOST.