

Statika 2

5. přednáška

Vybrané partie z plasticity

Miroslav Vokáč
miroslav.vokac@klok.cvut.cz

ČVUT v Praze, Fakulta architektury

2. prosince 2015

Plasticita ocelových
prutů

Pracovní diagram materiálů

Pružnoplustický ohyb
ocelového průřezu

Plastický výpočet
ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných
průřezů

Třídy ocelových
průřezů

Plastický ohyb
železobetonového
průřezu

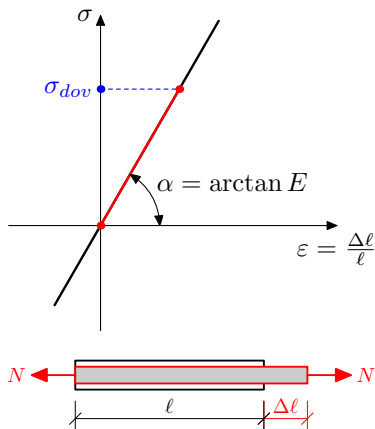
Plasticita
u excentrického tlaku
za vyloučeného tahu

Kdy lze použít
plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Pracovní diagram ideálně pružného materiálu



- ▶ **Pracovní diagram materiálu** zobrazuje závislost napětí σ na poměrné deformaci ϵ .
- ▶ **Ideálně pružný (elastický)** pracovní diagram je vyjádřen Hookeovým zákonem $\sigma = E\epsilon$.
- ▶ Teorie dovolených namáhání předpokládá lineární materiálový model a omezuje napětí hodnotou σ_{dov} .

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

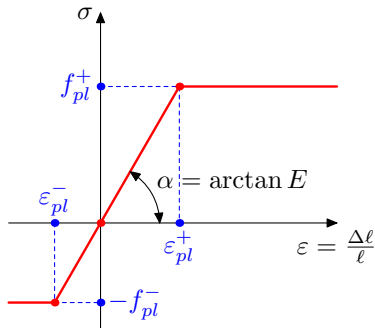
Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Pracovní diagram ideálně pružno-plastického materiálu



- ▶ Pracovní diagram **ideálně pružno-plastického** materiálu se řídí Hookeovým zákonem do velikosti napětí $\sigma = f_{pl}$.
- ▶ Při dosažení $\sigma = f_{pl}$ dále roste jen poměrné přetvoření ε a napětí zůstává konstantní.
- ▶ Plastická hodnota normálového napětí v tahu f_{pl}^+ nemusí být stejná s hodnotou v tlaku f_{pl}^- .

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

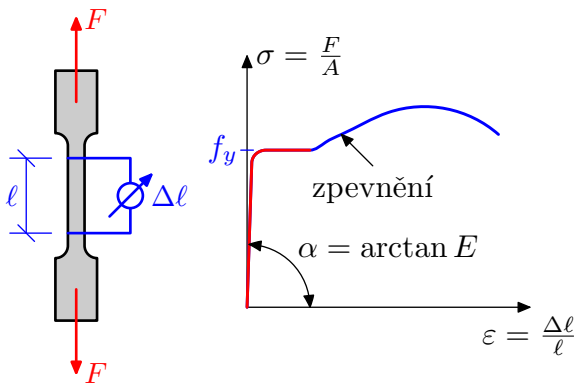
Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

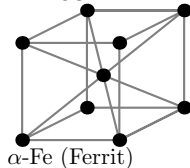
Kontrolní otázky

Pracovní diagram oceli

s vyznačenou mezí kluzu



$f_y \dots$ mez kluzu (yield value) je způsobená přeskupením atomů v krystalické mřížce.



- ▶ Pracovní diagram oceli si nejčastěji idealizujeme jako **ideální pružno-plastický pracovní diagram**.
- ▶ Předpokládáme stejnou hodnotu meze kluzu v tlaku i tahu, tj. $f_y = f_{pl}^- = f_{pl}^+$.

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

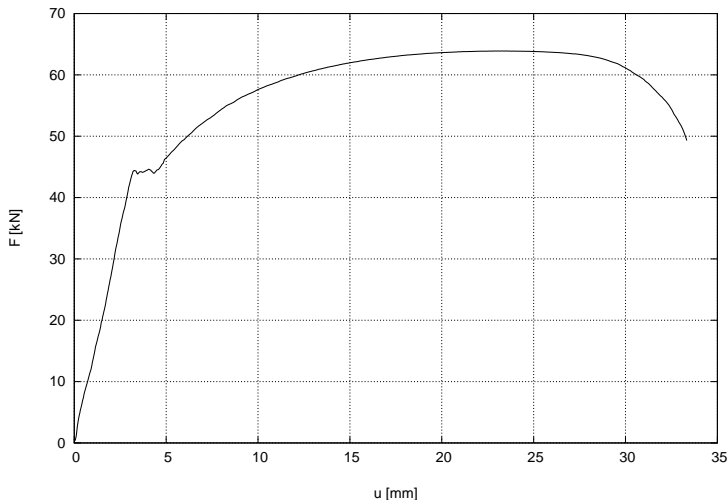
Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Pracovní diagram oceli

s vyznačenou mezí kluzu

Záznam reálné zkoušky pevnosti oceli v tahu



Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

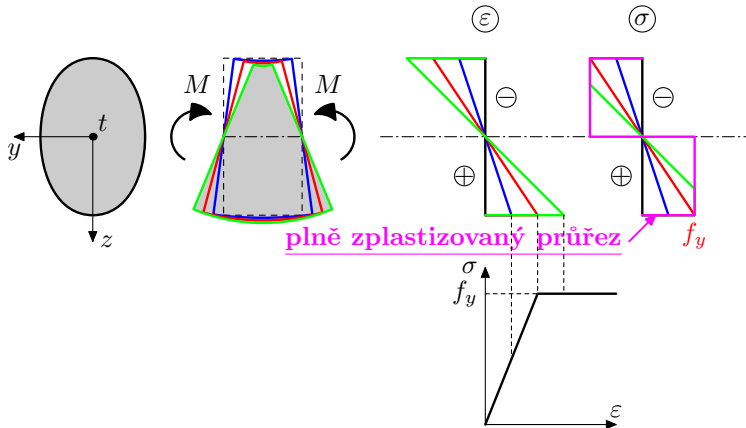
Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Průžnoplastický ohyb ocelového průřezu

Předpokládáme průřezy symetrické k ose z

- ▶ Průběh ε je lineární.
- ▶ Normálové napětí σ se určí podle pracovního diagramu.



- ▶ V únosnosti ohýbaného průřezu jsou plastické rezervy, které můžeme v některých případech využít.

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálů

Průžnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

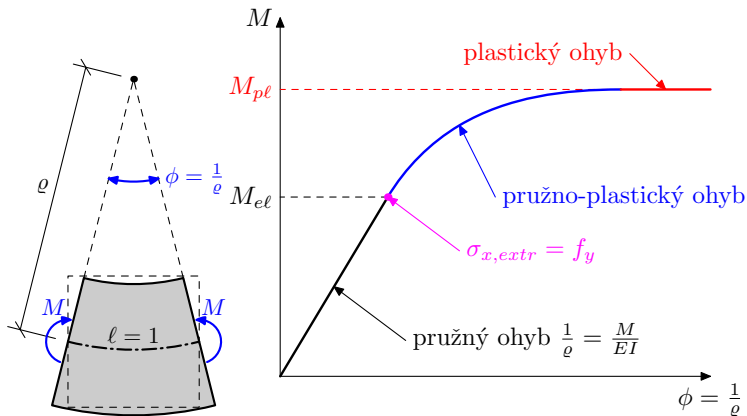
Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Závislost ohybového momentu M a křivosti $\phi = \frac{1}{\rho}$



M_{el} ... v průřezu je dosažena mez kluzu f_y

M_{pl} ... plně zplastizovaný průřez

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálů

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

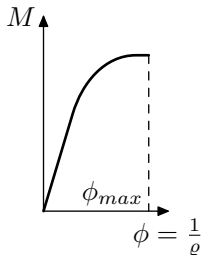
Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

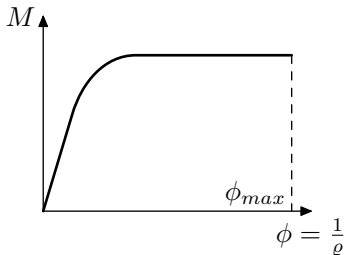
$M(\phi)$ diagram průřezu s omezenou a plnou rotační kapacitou

Průřez s omezenou rotační kapacitou



Hodnota ϕ_{max} je malá a brzy dojde k porušení průřezu.

Průřez s plnou rotační kapacitou



Hodnota ϕ_{max} je velká a plně zplastizovaný průřez je schopen vytvořit plastický kloub.

Plasticita ocelových průřezů

Pracovní diagram materiálů

Průžnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

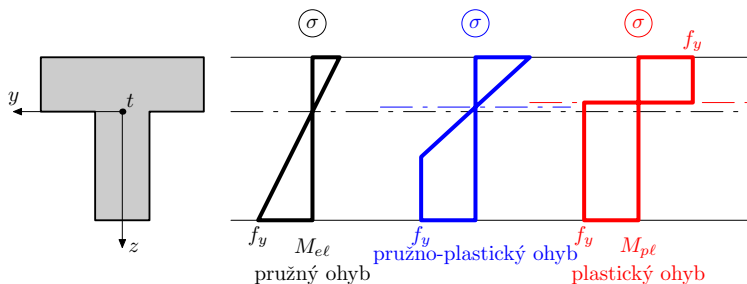
Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

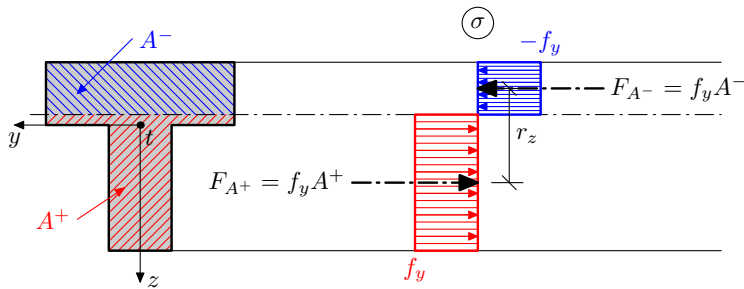
Neutrální osa při pružno-plastickém ohybu



- ▶ N.O. při pružno-plastickém ohybu neprochází těžištěm jako v pružném stavu.
- ▶ Poloha N.O. se stanoví z podmínky ekvivalence pro N .

Plastický ohyb ocelového průřezu

Poloha N. O.

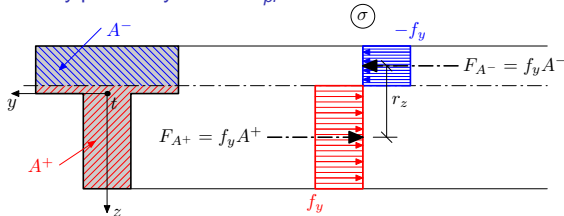


Neutrální osa se určí z podmínky ekvivalence $N = \int_A \sigma_x dA = 0$:

$$\begin{aligned} \rightarrow: F_{A^+} - F_{A^-} &= 0 \\ f_y A^+ - f_y A^- &= 0 \\ A^+ &= A^- \end{aligned}$$

Plastický ohyb ocelového průřezu

Plastický průřezový modul W_{pl}



Plastický ohybový moment M_{pl}

1. Známe těžiště průřezu:

$$M_{pl} = f_y S_y(A^+) + f_y S_y(A^-)$$

$$M_{pl} = f_y [S_y(A^+) + S_y(A^-)]$$

$$M_{pl} = f_y W_{pl}$$

2. Známe těžiště ploch A^+ a A^- , potom lze určit rameno vnitřních sil r_z :

$$M_{pl} = r_z F_{A^+} = r_z F_{A^-}$$

$$M_{pl} = \frac{1}{2} f_y A r_z$$

Plastický průřezový modul $W_{y,pl}$:

$$W_{pl} = S_y(A^+) + S_y(A^-) = \frac{1}{2} A r_z$$

Kde $S_y(A^+)$, resp. $S_y(A^-)$, je statický moment plochy A^+ , resp. A^- , k těžišťové ose y .

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálů

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

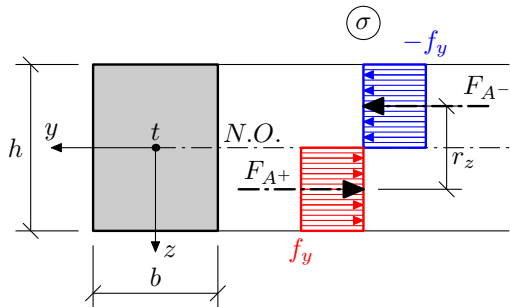
Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Plastický ohyb ocelového průřezu

Plastický průřezový modul W_{pl} obdélníkového průřezu



- ▶ N.O. prochází těžištěm.
- ▶ $A^+ = A^- = \frac{1}{2}bh$
- ▶ $r_z = \frac{1}{2}h$
- ▶ $M_{pl} = f_y A^+ r_z = \frac{1}{4}f_y b h^2$

$$W_{y,pl} = \frac{1}{4}bh^2 = 1,5 W_{y,el}$$

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálů

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Plastický průřezový modul některých průřezů

Plasticita ocelových
prutů

Pracovní diagram materiálů

**Pružnoplastický ohyb
ocelového průřezu**

Plastický výpočet
ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných
průřezů

Třídy ocelových
průřezů

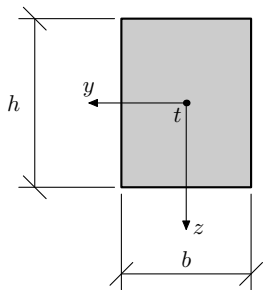
Plastický ohyb
železobetonového
průřezu

Plasticita
u excentrického tlaku
za vyloučeného tahu

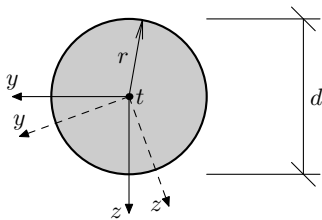
Kdy lze použít
plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky



$$W_{y,pl} = \frac{1}{4}bh^2$$



$$W_{y,pl} = \frac{1}{6}\pi d^3$$

Plastický průřezový modul některých průřezů

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálů

Průžnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

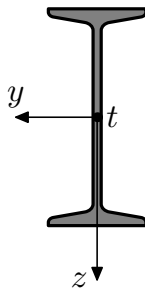
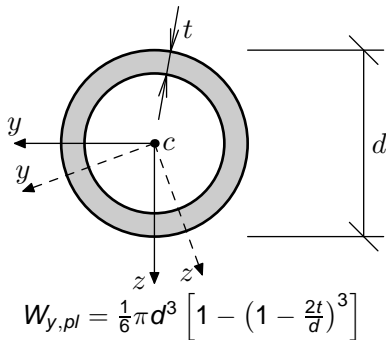
Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky



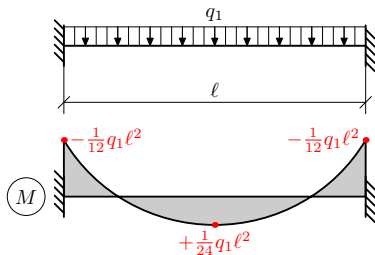
$W_{y,pl} = 1,14 W_y$ až $1,17 W_y$
Je tabelováno v ocelářských tabulkách.

Plastický výpočet ohybových momentů

Příklad – prut vetknutí-vetknutí

Stanovte zatížitelnost prutu vetknutí-vetknutí, připustíme-li plné zplastizování průřezu.

Předpokládejme, že je znám plastický ohybový moment M_{pl} .



- ▶ Nejprve se určí průběh M podle teorie pružnosti.
- ▶ K plnému zplastizování průřezu dojde ve vetknutích, jestliže $\frac{1}{12}q_1 l^2 = M_{pl} \Rightarrow q_1$
- ▶ Pokud je dostatečná rotační kapacita průřezu, vznikne ve vetknutí plastický kloub.
- ▶ Dojde ke změně statického systému a konstrukci lze dále přitížit.

Plasticita ocelových prutů

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

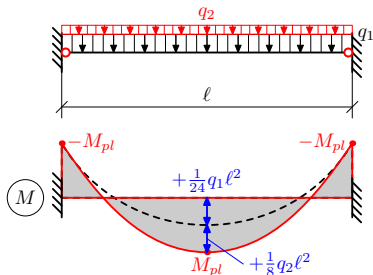
Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Plastický výpočet ohybových momentů

Příklad – prut vetknutí-vetknutí (pokračování)

Uvažujme předchozí průběh M , změnu statického systému (klouby ve vetknutích) a přitížení q_2 .



- ▶ Únosnost konstrukce bude vyčerpána, jestliže pro přitížení q_2 bude platit $M_{pl} = \frac{1}{24} q_1 \ell^2 + \frac{1}{8} q_2 \ell^2$.
- ▶ Potom vznikne plastický kloub i uprostřed rozpětí prutu a tím vznikne kinematický mechanismus.
- ▶ K porušení konstrukce dojde při zatížení $q_{pl} = q_1 + q_2$.

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

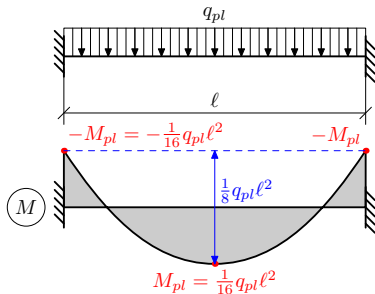
Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Plastický výpočet ohybových momentů

Příklad – prut vetknutí-vetknutí (pokračování)



$$M_{pl} = \frac{1}{16} q_{pl} l^2 \Rightarrow q_{pl} = \frac{16 M_{pl}}{l^2}$$

- ▶ Lze stanovit plastický průběh ohybových momentů M od q_{pl} .
- ▶ **Staticky neurčité konstrukce** mají v únosnosti plastické rezervy. Při dosažení M_{pl} v jediném průřezu dojde **za předpokladu dostatečné rotační kapacity** plastického kloubu ke změně statického systému a konstrukci lze dále zatížit.

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

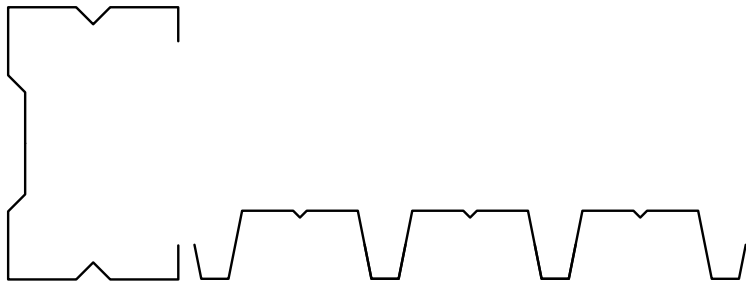
Plasticita u excentrického tlaku za vyloučení tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Ohyb tenkostěnných průřezů



- ▶ Jedná se zejména o průřezy tvarované za studena.
- ▶ Štíhlosti částí průřezu jsou velké, a proto dochází k lokálnímu boulení.
- ▶ Lokální boulení je stabilitní problém podobný k vybočení tlačенého prutu.

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

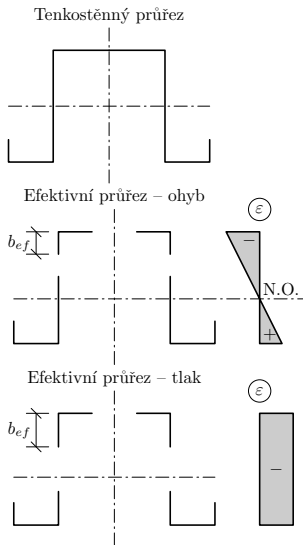
Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Ohyb tenkostěnných průřezů

Efektivní průřez



- ▶ Oblasti, které v tlačené části průřezu lokálně boulí, se nezapočítávají do plochy průřezu.
- ▶ V normě jsou uvedeny pravidla pro stanovení b_{ef} a sestavení **efektivního průřezu**.
- ▶ Efektivní průřez závisí na způsobu namáhání.
- ▶ Rozdělení napětí σ v efektivním průřezu se uvažuje pružně (plasticitu je možné využít pouze v některých případech a jen omezeně).

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu
 Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu
 Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Třídy ocelových průřezů dle ČSN EN 1991-3

Navrhování ocelových konstrukcí

Norma rozlišuje 4 třídy průřezu:

1. Průřezy schopné vytvářet plastické klouby s plnou rotační kapacitou.
2. V průřezu může vzniknout plastický kloub s omezenou rotační kapacitou.
3. Průřez lze využít pružně.
4. Tenkostěnné průřezy – dochází k lokálnímu boulení v tlačенých částech průřezu.

O zatřídění rozhoduje způsobu namáhání a štíhlost tlačенých částí průřezu.

Zatřídění **válcovaných průřezů** je uvedeno v ocelářských tabulkách.

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Třídy ocelových průřezů dle ČSN EN 1991-3

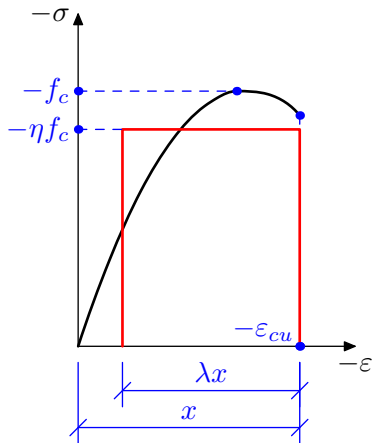
Navrhování ocelových konstrukcí

Způsob výpočtu konstrukce v mezním stavu únosnosti:

Třída průřezu	Stanovení průběhu ohybových momentů M	Napětí σ_x v průřezu
1	plastické	plastické
2	pružné	plastické
3	pružné	pružné
4	pružné	s efektivním průřezem

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Pracovní diagram betonu



- ▶ Pracovní diagram betonu v tlaku je nelineární.
- ▶ V tahu beton nepůsobí a nepřanáší žádné tahové napětí.
- ▶ Pro plastický výpočet únosnosti průřezu se pracovní diagram nahrazuje **obdélníkovým průběhem**.
- ▶ Pro běžné třídy betonu je $\eta = 1$ a $\lambda = 0,8$.

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

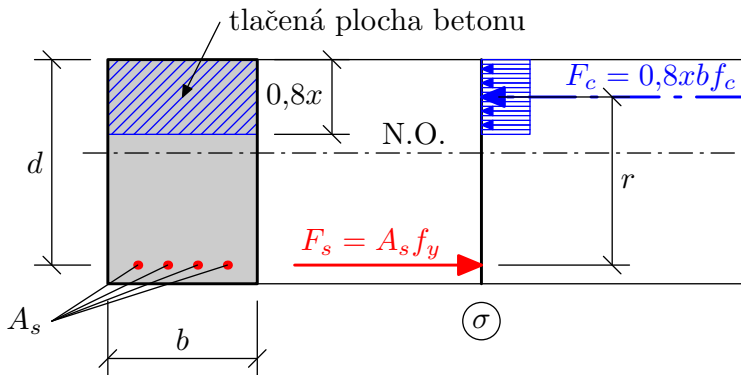
Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plastický ohybový moment



1. Tlačená oblast betonu

$$\begin{aligned} \rightarrow: F_s - F_c &= 0 \\ A_s f_y - 0,8x b f_c &= 0 \\ x &= \frac{A_s f_y}{0,8 b f_c} \end{aligned}$$

2. Plastický ohybový moment

$$\begin{aligned} M_{pl} &= F_s r = F_c r \\ M_{pl} &= A_s f_y \left(d - \frac{0,8x}{2} \right) \\ M_{pl} &= 0,8x b f_c \left(d - \frac{0,8x}{2} \right) \end{aligned}$$

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálů

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

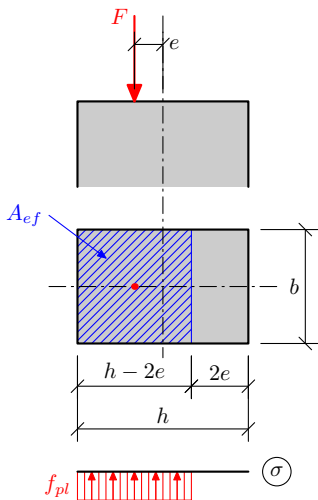
Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Plastické rozdělení napětí



- ▶ Předpokládá se rovnoměrné rozdělení napětí f_{pl} na efektivní ploše A_{ef} .
- ▶ Síla F musí mít působiště v těžišti A_{ef} .
- ▶ Maximální velikost síly F pro danou excentricitu je dána

$$F \leq A_{ef} f_{pl} = b(h - 2e) f_{pl}.$$
- ▶ Může být omezena velikost excentricity, např. podmínkou $e \leq \frac{1}{3}h$.

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálů

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

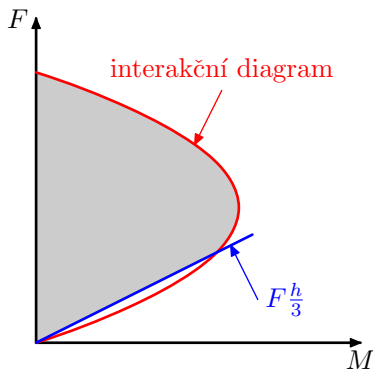
Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Interakční diagram

- ▶ Pro každou hodnotu síly $F \leq bhf_{pl}$ lze určit maximální excentricitu e a ohybový moment $M = Fe$.
- ▶ Výsledkem je **interakční diagram**.
- ▶ Lze také zakreslit lineární podmínku $e \leq \frac{1}{3}h$.
- ▶ Stav uvnitř diagramu je přípustný, stav vně diagramu je nepřípustný.



Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Kdy lze použít plastický výpočet

a plastické rezervy v konstrukci

Dnes navrhujeme podle teorie dílčích součinitelů, která bývá v praxi nazývána jako **teorie mezních stavů**.

Rozlišujeme 2 mezní stavy:

1. Mezní stav únosnosti

- ▶ Stav, kdy dochází ke ztrátě únosnosti porušením konstrukce.
- ▶ V mezním stavu únosnosti se uvažuje extrémně vysoké zatížení a extrémně nízké pevnosti materiálu – návrhové hodnoty.
- ▶ Lze za konkrétních podmínek využít plasticitu a plastické rezervy.

2. Mezní stav použitelnosti

- ▶ Stav, kdy dojde ke ztížení podmínek používání konstrukce z důvodů nadměrných přetvoření, průhybů, sedání, nadměrného kmitání, nadměrného rozevření trhlin. . .
- ▶ Používají se charakteristické hodnoty zatížení.
- ▶ Je třeba prokázat, že se konstrukce chová pružně.
- ▶ Proto se používá pružný výpočet.

Plasticita ocelových prutů

Pracovní diagram materiálu

Pružnoplastický ohyb ocelového průřezu

Plastický výpočet ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných průřezů

Třídy ocelových průřezů

Plastický ohyb železobetonového průřezu

Plasticita u excentrického tlaku za vyloučeného tahu

Kdy lze použít plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Plasticita ocelových
prutů

Pracovní diagram materiálů

Pružnoplastický ohyb
ocelového průřezu

Plastický výpočet
ohybových momentů

Ohyb tenkostěnných
průřezů

Třídy ocelových
průřezů

Plastický ohyb
železobetonového
průřezu

Plasticita
u excentrického tlaku
za vyloučeného tahu

Kdy lze použít
plastický výpočet?

Kontrolní otázky

Kontrolní otázky

Děkuji za pozornost.

Vysázeno systémem \LaTeX .

Obrázky vytvořeny v systému METAPOST.