MATEMATIKA – PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ

Kuželosečky

1 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0.$$

a) Napište parametrický popis této křivky.

b) Napište obecné rovnice tečen křivky v jejích průsečících s osou x.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a následně úpravu na středový tvar.

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 2y + 1) - 1 + 6 &= 0 \\ (x-3)^2 - 9 + (y+1)^2 - 1 + 6 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 &= 4 \end{aligned}$$

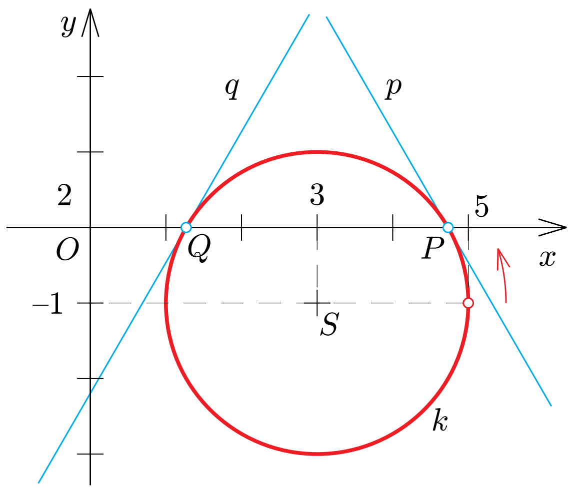
Křivka je kružnice se středem $S[3\,;\,-1]$ a poloměrem $r = 2$.

a) Jeden z možných parametrických popisů této kružnice je

$$k(t) = [3 + 2 \cdot \cos t\,;\, -1 + 2 \cdot \sin t],\ t \in \langle 0\,;\, 2\pi) \,.$$

Počáteční bod parametrizace je $[5\,;\,-1]$, orientace kružnice je kladná (tj. parametr probíhá kružnici proti směru otáčení hodinových ručiček).

b) Pro určení průsečíků kružnice s osou x můžeme využít např. její parametrické rovnice.



$$\begin{aligned} -1 + 2\sin t &= 0 \\ \sin t &= \frac{1}{2} \\ t &\in \left\{ \frac{\pi}{6}\,;\, \frac{5\pi}{6} \right\} \end{aligned}$$

Průsečíky s osou x jsou body $P = k\left(\frac{\pi}{6}\right) = [3 + \sqrt{3}\,;\,0]$ a $Q = k\left(\frac{5\pi}{6}\right) = [3 - \sqrt{3}\,;\,0]$.

Směrové vektory tečen kružnice jsou popsány vektorovou funkcí

$$u(t) = (-2\sin t\,;\, 2\cos t),\ t \in \langle 0\,;\, 2\pi).$$

Směrový vektor tečny kružnice v bodě P je $u\left(\frac{\pi}{6}\right) = (-1\,;\,\sqrt{3})$, směrový vektor tečny kružnice v bodě Q je $u\left(\frac{5\pi}{6}\right) = (-1\,;\,-\sqrt{3})$.

Tečna p kružnice v bodě P má obecnou rovnici

$$p:\ \sqrt{3}x + y - 3(\sqrt{3} + 1) = 0.$$

Tečna q kružnice v bodě Q má obecnou rovnici

$$q:\ \sqrt{3}x - y - 3(\sqrt{3} - 1) = 0.$$

2 Kružnice má střed $S[-2\,;\,3]$ a prochází bodem $Q[-3\,;\,6]$

a) Napište parametrický předpis dané kružnice. Počáteční bod parametrizace nechť je bod Q, orientace záporná (tj. parametr bude probíhat kružnici po směru otáčení hodinových ručiček).

b) Napište obecnou rovnici dané kružnice ve středovém tvaru.

c) Určete souřadnice průsečíků kružnice se souřadnicovými osami.

Řešení

a) Parametrický popis kružnice se středem S, procházející bodem Q, s počátečním bodem parametrizace Q a se zápornou orientací odvodíme s využitím dvou kolmých vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Vektor u má počáteční bod S a koncový bod Q: $\vec{u} = Q - S = (-1{,}3)$. Vektor v je na u kolmý a má stejnou velikost. Ze dvou možností vybereme ten vektor v umístěný do bodu S, jehož koncový bod odpovídá otočení bodu Q o úhel $\frac{\pi}{2}$ v záporném smyslu: $\vec{v} = (3{,}1)$.

Parametrický popis kružnice pak sestavíme podle vztahu:

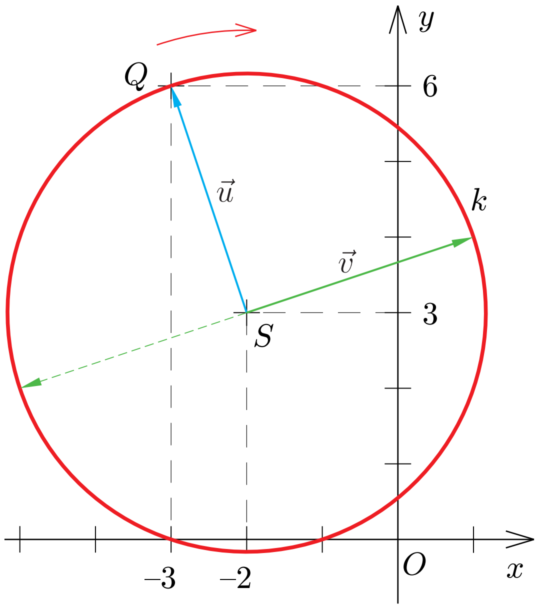
$$k(t) = S + \vec{u}\cdot\cos(t) + \vec{v}\cdot\sin(t),\ t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$$

Po dosazení souřadnic bodu S a vektorů u a v ve sloupcovém tvaru získáme předpis

$$k(t) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cdot\cos(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\sin(t),\ t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle$$

Přepisem po řádcích získáme standardní zápis parametrizace kružnice k

$$k(t) = [-2 - \cos t + 3\sin t\,;\, 3 + 3\cos t + \sin t],$$
$$t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle.$$



b) Poloměr kružnice je velikost úsečky SQ, tedy

$$r = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

Rovnice kružnice ve středovém tvaru je

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 10.$$

c) Souřadnice průsečíků kružnice s osou y získáme dosazením $x = 0$ do obecné rovnice kružnice.

$$\begin{aligned} 4 + (y-3)^2 &= 10 \\ y^2 - 6y + 3 &= 0 \\ y &\in \{3 - \sqrt{6}, 3 + \sqrt{6}\} \end{aligned}$$

Průsečíky kružnice s osou y jsou body $[0{,}3 - \sqrt{6}]$ a $[0{,}3 - \sqrt{6}]$.

Souřadnice průsečíků kružnice s osou x získáme dosazením $y = 0$ do obecné rovnice kružnice.

$$\begin{aligned} (x+2)^2 + 9 &= 10 \\ x^2 + 4x + 3 &= 0 \\ x &\in \{-3\,;\,-1\} \end{aligned}$$

Průsečíky kružnice s osou x jsou body $[-3\,;\,0]$ a $[-1\,;\,0]$.

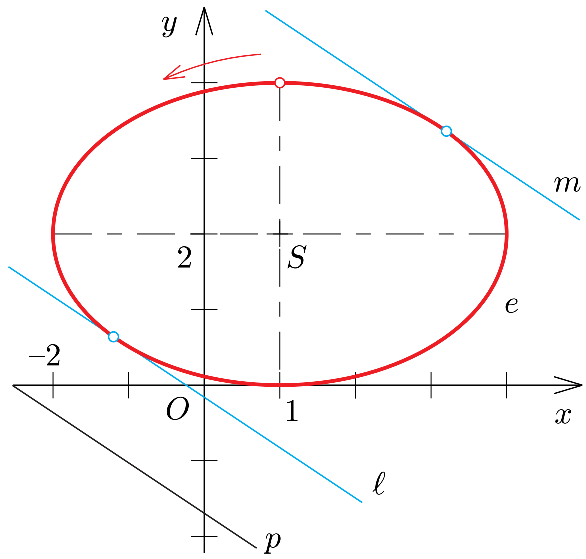
3 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0.$$

a Napište parametrický popis této křivky.

b napište obecné rovnice tečen křivky, které jsou rovnoběžné s přímkou $p:\ 2x + 3y + 5 = 0$.

Řešení



Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a následně úpravu na středový tvar.

$$\begin{aligned} 4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 - 36 &= 0 \\ \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

Křivka je elipsa se středem $S[1\ ;\ 2]$, hlavní osa je přímka $y = 2$, vedlejší osa je přímka $x = 1$, velikost hlavní poloosy $a = 3$, velikost vedlejší poloosy $b = 2$.

Ohniska elipsy jsou body $E[1-\sqrt{5}\ ;\ 2]$ a $F[1+\sqrt{5}\ ;\ 2]$. Vrcholy jsou body $[4\ ;\ 2]$, $[1\ ;\ 4]$, $[-2\ ;\ 2]$ a $[1\ ;\ 0]$.

a Jeden z možných parametrických popisů této elipsy je

$$k(t) = [1 - 3\sin t\ ;\ 2 + 2\cos t],\ t \in \langle 0\ ;\ 2\pi\rangle\ .$$

Počáteční bod parametrizace je bod $[1\ ;\ 4]$, orientace kladná.

b Směrové vektory tečen elipsy jsou popsány vektorovou funkcí

$$u(t) = (-3\cos t\ ;\ -2\sin t),\ t \in \langle 0\ ;\ 2\pi\rangle.$$

Směrový vektor tečny elipsy, která je rovnoběžná s přímkou p, je kolmý na normálový vektor $\vec{n_p} = (2{,}3)$.

Vektory jsou kolmé právě tehdy, když jejich skalární součin je roven nule. Pro určení hodnot parametru t, pro které je vektor $u(t)$ kolmý k vektoru $\vec{n_p}$, tedy řešíme rovnici

$$\begin{aligned} u(t) \cdot \vec{n_p} &= 0 \\ (-3\cos t\ ;\ -2\sin t) \cdot (2\ ;\ 3) &= 0 \\ -6\cos t - 6\sin t &= 0 \\ -\cos t &= \sin t \\ \operatorname{cotg} t &= -1,\ \sin t \neq 0 \\ t &\in \left\{\frac{3\pi}{4}\ ;\ \frac{7\pi}{4}\right\} \end{aligned}$$

Tečna ℓ elipsy je určena bodem $k\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left[1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\ ;\ 2 - \sqrt{2}\right]$ a směrovým vektorem $u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\ ;\ -\sqrt{2}\right)$. Normálový vektor tečny ℓ je $\left(\sqrt{2}\ ;\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \sim (2\ ;\ 3)$.

Obecná rovnice tečny ℓ je: $2x + 3y - 8 + 6\sqrt{2} = 0$.

Tečna m elipsy je určena bodem $k\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left[1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\ ;\ 2 + \sqrt{2}\right]$ a směrovým vektorem $u\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\ ;\ \sqrt{2}\right)$. Normálový vektor tečny m je $\left(\sqrt{2}\ ;\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \sim (2\ ;\ 3)$.

Obecná rovnice tečny m je: $2x + 3y - 8 - 6\sqrt{2} = 0$.

4 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$9x^2 - 4y^2 + 36x + 24y - 36 = 0.$$

a Napište parametrický popis této křivky.

b Spočítejte souřadnice průsečíků této křivky se souřadnicovými osami.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a následně úpravu na středový tvar.

$$\begin{aligned} 9(x+2)^2 - 4(y-3)^2 - 36 &= 0 \\ \frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

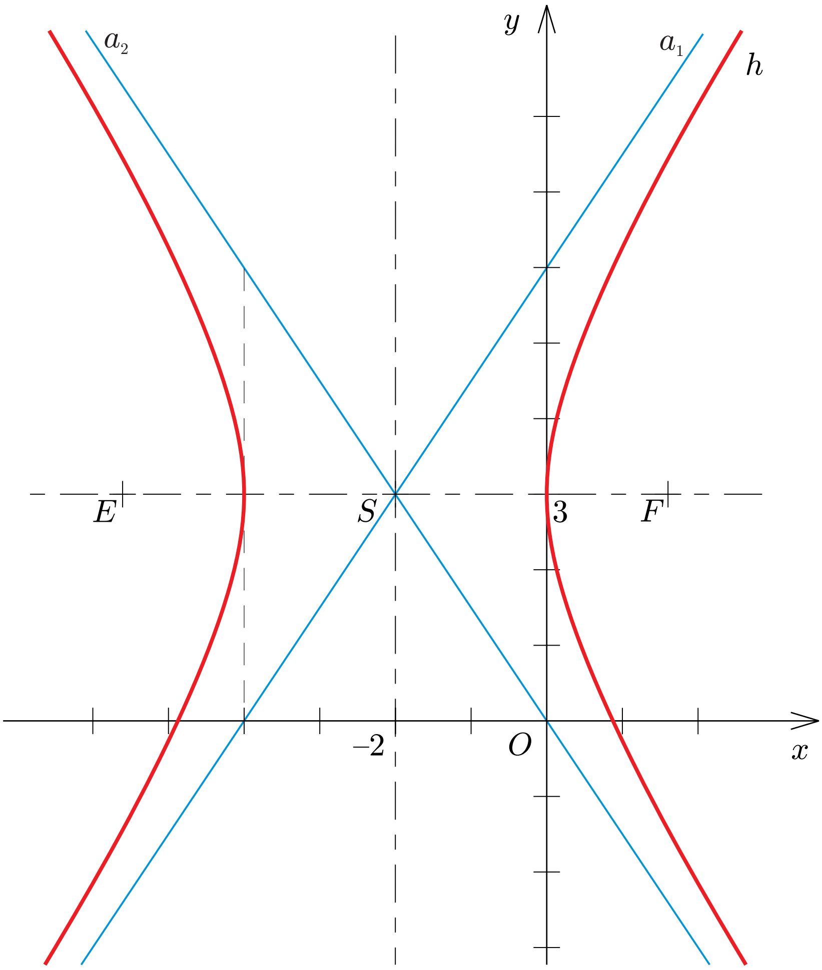
Křivka je hyperbola se středem $S[-2\,;\,3]$, hlavní osa je přímka $y = 3$, vedlejší osa je přímka $x = -2$, velikost hlavní poloosy $a = 2$, velikost vedlejší poloosy $b = 3$.

Ohniska hyperboly jsou body $E[-2 - \sqrt{13}\,;\,3]$ a $F[-2 + \sqrt{13}\,;\,3]$.

Vrcholy jsou body $[0\,;\,3]$ a $[-4\,;\,3]$.

Asymptoty hyperboly jsou přímky a_1, a_2 s obecnými rovnicemi

$$\begin{aligned} a_1 :&\quad 3x - 2y + 12 = 0 \\ a_2 :&\quad 3x + 2y = 0 \end{aligned}$$



a Parametrický popis této hyperboly je
$k(t) = [-2 \pm 2\cosh t\,;\,3 + 3\sinh t]$, $t \in \mathbb{R}$.

b Souřadnice průsečíků s osami určíme z obecné rovnice hyperboly dosazením $x = 0$ pro průsečíky s osou y a dosazením $y = 0$ pro průsečíky s osou x.

Pro určení průsečíků s osou y tedy řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} -4y^2 + 24y - 36 &= 0 \\ y^2 - 6y + 9 &= 0 \\ (y-3)^2 &= 0 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Průsečík hyperboly s osou y je bod $[0\,;\,3]$.

Pro určení průsečíků s osou x řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} 9x^2 + 36x - 36 &= 0 \\ x^2 + 4x - 4 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Průsečíky hyperboly s osou x jsou body $[-2 - 2\sqrt{2}\,;\,0]$ a $[-2 + 2\sqrt{2}\,;\,0]$.

5 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$-9x^2 + 9y^2 + 18x + 36y - 414 = 0.$$

a Napište parametrický popis této křivky.

b Spočítejte souřadnice průsečíků této křivky se souřadnicovými osami.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a následně úpravu na středový tvar.

$$\begin{aligned} -9(x-1)^2 + 9(y+2)^2 - 441 &= 0 \\ -\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y+2)^2}{49} &= 1 \end{aligned}$$

Křivka je rovnoosá hyperbola se středem $S[1\,;\,-2]$, hlavní osa je přímka $x = 1$, vedlejší osa je přímka $y = -2$, velikost hlavní i vedlejší poloosy $a = b = 7$.

Ohniska této hyperboly jsou body $E[1\,;\,-2-7\sqrt{2}]$ a $F[1\,;\,-2+7\sqrt{2}]$.
Vrcholy jsou body $[1\,;\,-9]$ a $[1\,;\,5]$.

Asymptoty hyperboly jsou přímky a_1, a_2 s obecnými rovnicemi:

$$\begin{aligned} a_1 &: \quad x - y - 3 = 0 \\ a_2 &: \quad x + y + 1 = 0 \end{aligned}$$

a Parametrický popis této hyperboly je:

$$h(t) = [1 + 7\sinh t\,;\,-2 \pm 7\cosh t],\ t \in \mathbb{R}.$$

b Souřadnice průsečíků s osami určíme z obecné rovnice hyperboly dosazením $x = 0$ pro průsečíky s osou y a dosazením $y = 0$ pro průsečíky s osou x.

Pro určení průsečíků s osou y tedy řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} 9y^2 + 36y - 414 &= 0 \\ y^2 + 4y - 46 &= 0 \\ y_{1,2} &= \frac{-4 \pm \sqrt{200}}{2} = \frac{-4 \pm 10\sqrt{2}}{2} = -2 \pm 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

Průsečíky hyperboly s osou y jsou body $[0\,;\,-2-5\sqrt{2}]$ a $[0\,;\,-2+5\sqrt{2}]$.

Pro určení průsečíků s osou x řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} -9x^2 + 18x - 414 &= 0 \\ x^2 - 2x + 46 &= 0 \\ x &\in \emptyset \end{aligned}$$

Hyperbola nemá průsečík s osou x.

6 Hyperbola má střed $S[3\,;\,2]$, hlavní osu rovnoběžnou s osou x, velikost hlavní poloosy je $a = 3$, velikost vedlejší poloosy je $b = 4$.

- **a** Určete souřadnice vrcholů a ohnisek hyperboly a napište obecné rovnice asymptot hyperboly.
- **b** Sestavte obecnou rovnici hyperboly ve středovém tvaru.
- **c** Napište parametrický popis hyperboly.
- **d** Určete souřadnice průsečíků hyperboly se souřadnicovými osami.

Řešení

a Velikost excentricity hyperboly je $e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$. Ohniska hyperboly jsou body $E[-2\,;\,2]$ a $F[8\,;\,2]$.
Vrcholy hyperboly jsou body $[0\,;\,2]$ a $[6\,;\,2]$.

Asymptoty hyperboly jsou přímky a_1, a_2 s obecnými rovnicemi:

$$\begin{aligned} a_1 :&\quad 4x - 3y - 6 = 0 \\ a_2 :&\quad 4x + 3y - 18 = 0 \end{aligned}$$

b

$$\frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

c S využitím vztahu platného pro hyperbolické funkce odvodíme parametrický popis jedné větve hyperboly.

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-3}{3}\right)^2 &- \left(\frac{y-2}{4}\right) &= 1 \\ (\cosh t)^2 &- (\sinh t)^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{3} &= \cosh t & \qquad \frac{y-2}{4} &= \sinh t \\ x &= 3 + 3\cosh t & y &= 2 + 4\sinh t \end{aligned}$$

Parametrický popis dané hyperboly je

$$h(t) = [3 \pm 3\cosh t\,;\, 2 + 4\sinh t],\ t \in \mathbb{R}$$

(znaménko + u $\cosh t$ pro pravou větev hyperboly, znaménko − pro levou větev).

d Souřadnice průsečíků s osami určíme z obecné rovnice hyperboly dosazením $x = 0$ pro průsečíky s osou y a dosazením $y = 0$ pro průsečíky s osou x.

Pro určení průsečíků s osou y tedy řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(y-2)^2}{16} &= 1 \\ (y-2)^2 &= 0 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Průsečík hyperboly s osou y je bod $[0\,;\,2]$.

Pro určení průsečíků s osou x řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{1}{4} &= 1 \\ 4x^2 - 24x - 9 &= 0 \\ x_{1,2} &= \frac{24 \pm \sqrt{720}}{8} = \frac{24 \pm \sqrt{16 \cdot 9 \cdot 5}}{8} = \frac{24 \pm 12\sqrt{5}}{8} = 3 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Průsečíky hyperboly s osou x jsou body $\left[3 - \frac{3\sqrt{5}}{2}\,;\,0\right]$ a $\left[3 + \frac{3\sqrt{5}}{2}\,;\,0\right]$.

7 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$4x^2 + y^2 - 32x + 4y + 52 = 0.$$

a Napište parametrické vyjádření této kuželosečky.

b Určete souřadnice průsečíků kuželosečky s osou x.

c Napište obecné rovnice tečen kuželosečky v jejích průsečících s přímkou $p: \ 2x + y - 6 = 0$.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a následně úpravu na středový tvar.

$$\begin{aligned} 4(x-4)^2 + (y+2)^2 - 16 &= 0 \\ \frac{(x-4)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} &= 1 \end{aligned}$$

Křivka je elipsa se středem $S[4\,;\,-2]$, hlavní osa je přímka $x = 4$, vedlejší osa je přímka $y = -2$, velikost hlavní poloosy $a = 4$, velikos vedlejší poloosy $b = 2$.

Velikost excentricity je $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$. Ohniska elipsy jsou body $E[4\,;\,-2-2\sqrt{3}]$ a $F[4\,;\,-2+2\sqrt{3}]$.

a Jeden z možných parametrických popisů elipsy je

$$e(t) = [4 + 2\cos t\,;\,-3 + 4\sin t],\ t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle.$$

Počáteční bod parametrizace je bod $[6\,;\,-2]$, orientace kladná.

b Průsečíky s osou x můžeme spočítat z parametrického vyjádření:

$$\begin{aligned} -2 + 4\sin t &= 0 \\ \sin t &= \frac{1}{2} \\ t &\in \left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\right\} \end{aligned}$$

Průsečíky elipsy s osou x jsou body $k\left(\frac{\pi}{6}\right) = [4 + \sqrt{3}\,;\,0]$ a $k\left(\frac{5\pi}{6}\right) = [4 - \sqrt{3}\,;\,0]$.

c Průsečíky elipsy s přímkou p získáme např. kombinací parametrického popisu elipsy a obecné rovnice přímky. Dosadíme jednotlivé souřadnicové funkce parametrického popisu elipsy za x a y do obecné rovnice přímky a vyřešíme vzniklou goniometrickou rovnici.

$$\begin{aligned} p: \qquad\qquad\qquad\qquad 2x + y - 6 &= 0 \\ p \cap e: \quad 2(4 + 2\cos t) + (-2 + 4\sin t) - 6 &= 0 \\ 4\cos t + 4\sin t &= 0 \\ -1 &= \operatorname{tg} t, \quad \cos t \neq 0 \\ t &\in \left\{\frac{3\pi}{4}\,;\,\frac{7\pi}{4}\right\} \end{aligned}$$

Průsečíky elipsy s přímkou p jsou body $k\left(\frac{3\pi}{4}\right) = [4 - \sqrt{2}\,;\,-2 + 2\sqrt{2}]$ a $k\left(\frac{7\pi}{4}\right) = [4 + \sqrt{2}\,;\,-2 - 2\sqrt{2}]$.

Směrové vektory tečen elipsy jsou popsány vektorovou funkcí

$$u(t) = (-2\sin t\,;\,4\cos t),\ t \in \langle 0\,;\,2\pi\rangle.$$

Směrové vektory tečen elipsy v jejích průsečících s přímkou p jsou $u\left(\frac{3\pi}{4}\right) = (-\sqrt{2}\,;\,-2\sqrt{2}) \sim$ $\sim (1\,;\,2)$ a $u\left(\frac{7\pi}{4}\right) = (\sqrt{2}\,;\,2\sqrt{2}) \sim (1\,;\,2)$.

Tečny elipsy v jejích průsečících s přímkou p mají obecné rovnice:

$$\begin{aligned} 2x - y - 10 + 4\sqrt{2} &= 0, \\ 2x - y - 10 - 4\sqrt{2} &= 0. \end{aligned}$$

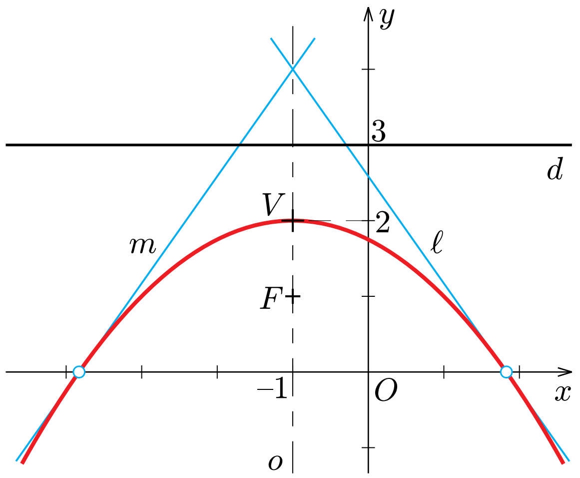
8 Parabola je určena vrcholem $V[-1\,;\,2]$ a řídící přímkou $d:\ y=3$.

a Určete souřadnice ohniska a sestavte obecnou rovnici paraboly ve vrcholovém tvaru.

b Napište parametrické vyjádření paraboly.

c Určete souřadnice průsečíků paraboly se souřadnicovými osami.

d Napište obecné rovnice tečen paraboly v jejích průsečících se souřadnicovými osami.



a Parametr paraboly je $p=2$, ohnisko je bod $F[-1\,;\,1]$, osa je přímka $o:\ x=-1$.

Obecná rovnice paraboly ve vrcholovém tvaru je:

$$(x+1)^2=-4(y-2).$$

b Zvolíme parametr $t=x+1$. Z obecné rovnice poté vyjádříme x a y:

$$\begin{aligned} x &= t-1\\ -4(y-2) &= t^2\\ y &= -\frac{t^2}{4}+2 \end{aligned}$$

Parametrické vyjádření dané paraboly je:

$$k(t)=\left[t-1\,;\,-\frac{t^2}{4}+2\right],\ t\in\mathbb{R}.$$

c Průsečíky paraboly se souřadnicovými osami určíme z parametrického vyjádření. Pro určení průsečíků s osou y řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} t-1 &= 0\\ t &= 1 \end{aligned}$$

Průsečík paraboly s osou y je bod $k(1)=\left[0\,;\,\frac{7}{4}\right]$.

Pro určení průsečíků s osou x řešíme rovnici:

$$\begin{aligned} -\frac{t^2}{4}+2 &= 0\\ t^2 &= 8\\ |t| &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Průsečíky paraboly s osou x jsou body $k(-2\sqrt{2})=[-2\sqrt{2}-1\,;\,0]$ a $k(2\sqrt{2})=[2\sqrt{2}-1\,;\,0]$.

d Směrové vektory tečen paraboly jsou popsány vektorovou funkcí

$$u(t)=\left(1\,;\,-\frac{t}{2}\right),\ t\in\mathbb{R}.$$

Směrový vektor tečny paraboly v jejím průsečíku s osou y je vektor $u(1)=\left(1\,;\,-\frac{1}{2}\right)\sim(2\,;\,-1)$.

Obecná rovnice tečny paraboly v jejím průsečíku s osou y je

$$x+2y-\frac{7}{2}=0.$$

Směrové vektory tečen paraboly v jejích průsečících s osou x jsou $u(-2\sqrt{2})=(1\,;\,\sqrt{2})$ a $u(2\sqrt{2})=(1\,;\,-\sqrt{2})$.

Obecné rovnice tečen paraboly v jejích průsečících s osou x jsou:

$$\begin{aligned} \ell:&\quad \sqrt{2}x+y-4+\sqrt{2} &= 0,\\ m:&\quad -\sqrt{2}x+y-4-\sqrt{2} &= 0. \end{aligned}$$

9 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí

$$y^2 + 3x + 2y - 14 = 0.$$

a Napište parametrické vyjádření této křivky.

b Určete souřadnice průsečíků křivky se souřadnicovými osami.

c Napište obecnou rovnici tečny křivky, která je rovnoběžná s přímkou $q:\ 3x - 2y + 10 = 0$.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné y a následně úpravu na vrcholový tvar.

$$\begin{aligned} (y+1)^2 + 3x - 15 &= 0 \\ (y+1)^2 &= -3(x-5) \end{aligned}$$

Křivka je parabola s vrcholem $V[5\,;\,-1]$, osa je přímka $y = -1$, parametr je $p = \frac{3}{2}$, ohnisko paraboly je bod $F\left[4\frac{1}{4}\,;\,-1\right]$, řídící přímka je $d:\ x = 5\frac{3}{4}$.

a Provedeme volbu parametru $t = y + 1$ a následně vyjádříme x z obecné rovnice:

$$\begin{aligned} y &= t - 1 \\ -3(x-5) &= t^2 \\ x &= -\frac{t^2}{3} + 5 \end{aligned}$$

Parametrické vyjádření paraboly je

$$k(t) = \left[-\frac{t^2}{3} + 5\,;\,t-1\right],\ t \in \mathbb{R}.$$

b Souřadnice průsečíků paraboly s osou y získáme např. dosazením $x = 0$ do obecné rovnice:

$$\begin{aligned} y^2 + 2y - 14 &= 0 \\ y_{1,2} &= \frac{-2 \pm \sqrt{60}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{15}}{2} = -1 \pm \sqrt{15} \end{aligned}$$

Průsečíky paraboly s osou y jsou body $\left[0\,;\,-1-\sqrt{15}\right]$ a $\left[0\,;\,-1+\sqrt{15}\right]$.

Souřadnice průsečíku paraboly s osou x získáme dosazením $y = 0$ do obecné rovnice:

$$\begin{aligned} 3x - 14 &= 0 \\ x &= \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Průsečík paraboly s osou x je bod $\left[4\frac{2}{3}\,;\,0\right]$.

c Směrové vektory tečen paraboly jsou popsány vektorovou funkcí

$$u(t) = \left(-\frac{2}{3}t\,;\,1\right),\ t \in \mathbb{R}.$$

Tečna paraboly je rovnoběžná s přímkou q právě tehdy, když její směrový vektor a normálový vektor přímky q ($\vec{n_q} = (3\,;\,-2)$) jsou kolmé. Tedy řešíme (s využitím skalárního součinu vektorů):

$$\begin{aligned} u(t) \cdot \vec{n_q} &= 0 \\ \left(-\frac{2}{3}t\,;\,1\right) \cdot (3\,;\,-2) &= 0 \\ -2 - 2t &= 0 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Tečna paraboly v bodě $k(-1) = [4\frac{2}{3}\,;\,-2]$ je rovnoběžná s přímkou q.

Obecná rovnice této tečny je

$$3x - 2y - 18 = 0.$$

10 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí
$$4x^2 - y^2 - 8x + 4y = 0.$$

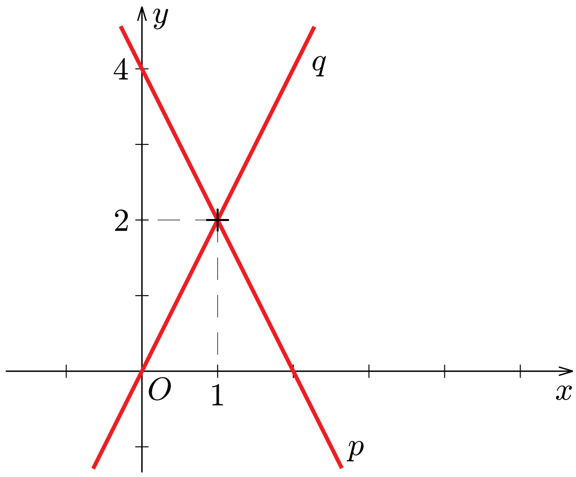
a Napište parametrický popis křivky.

b Určete průsečíky křivky se souřadnicovými osami.

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y a upravíme s využitím vzorce pro rozdíl čtverců.

$$\begin{aligned} 4(x-1)^2 - (y-2)^2 &= 0 \\ \underbrace{(2(x-1))^2}_{a^2} - \underbrace{(y-2)^2}_{b^2} &= 0 \\ [\underbrace{2(x-1)}_{a} + \underbrace{(y-2)}_{b}] \cdot [\underbrace{2(x-1)}_{a} - \underbrace{(y-2)}_{b}] &= 0 \\ (2x+y-4)\cdot(2x-y) &= 0 \end{aligned}$$



Kuželosečka je singulární – složená ze dvou různoběžných přímek:
$$\begin{aligned} p:\quad 2x + y - 4 &= 0 \\ q:\quad 2x - y &= 0 \end{aligned}$$

a Průsečíkem přímek je bod $[1\,;2]$, směrový vektor přímky p je $(1\,;-2)$, směrový vektor přímky q je $(1\,;2)$.

Parametrické popisy přímek p a q jsou:

$$p:\quad \begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad\qquad q:\quad \begin{aligned} x &= 1 + s \\ y &= 2 + 2s, \quad s \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b Průsečíky přímky p se souřadnicovými osami jsou body $[0\,;4]$, $[2\,;0]$.

Průsečík přímky q se souřadnicovými osami je bod $[0\,;0]$.

11 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí
$$2x^2 + y^2 + 12x - 2y + 19 = 0.$$

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné x a v proměnné y.

$$2(x+3)^3 + (y-1)^2 = 0$$

Této rovnici vyhovuje právě jedna dvojice x a y. Kuželosečka je singulární – jeden bod $[-3\,;1]$.

12 Rozhodněte, jaká kuželosečka je popsána rovnicí
$$y^2 + 6y + 9 = 0.$$

Řešení

Provedeme úpravu rovnice na úplný čtverec v proměnné y.

$$(y+3)^2 = 0$$

Kuželosečka je singulární – jedna dvojnásobná přímka: $y = -3$.